

Uitwerkingen van het deeltentamen.

Opgave 1 (10 punten). Zij P, Q, R proposities. Bewijs of ontkracht

$$(P \wedge Q) \rightarrow R \Leftrightarrow P \rightarrow (Q \rightarrow R).$$

Uitwerking 1. De propositie

$$((P \wedge Q) \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R)),$$

is een tautologie, wat te zien is uit de volgende waarheidstabel

P	Q	R	$((P \wedge Q) \rightarrow R)$	$\Leftrightarrow$	$(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

Daar de kolom onder $\Leftrightarrow$ alleen maar de waar bevat. De uitspraak

$$(P \wedge Q) \rightarrow R \Leftrightarrow P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$

is dus waar.

Opgave 2 (10 punten). Zij P en Q verzamelingen. Bewijs dat geldt

$$(P - Q) \cup (Q - P) = P \cup Q - P \cap Q.$$

Uitwerking 2. We bewijzen twee inclusies. Zij $x \in (P - Q) \cup (Q - P)$. We onderscheiden twee gevallen. Of $x \in P - Q$, of $x \in Q - P$. In het eerste geval is $x \in P$, en $x \notin Q$. Omdat $x \in P$ geldt dus dat $x \in P \cup Q$. Omdat $x \notin Q$ geldt dat $x \notin P \cap Q$. In het eerste geval geldt dus dat $x \in P \cup Q - P \cap Q$. Het bewijs in het geval dat $x \in Q - P$ is geheel hetzelfde. We concluderen dat $(P - Q) \cup (Q - P) \subseteq P \cup Q - P \cap Q$.

We bewijzen nu de andere inclusie. Zij $y \in P \cup Q - P \cap Q$. Dan $y \in P \cup Q$ en $y \notin P \cap Q$. Er zijn weer twee gevallen: of $y \in P$, of $y \in Q$. In het eerste geval weten we, omdat $y \notin P \cap Q$, en $y \in P$, dat $y \notin Q$, en dus dat $y \in P - Q$. In het tweede geval, omdat $y \notin P \cap Q$ en $y \in Q$, dat $y \notin P$, dus dat $y \in Q - P$. We hebben nu bewezen dat $P \cup Q - P \cap Q \subseteq (P - Q) \cup (Q - P)$. Daarmee volgt dus ook de gevraagde gelijkheid.

Opgave 3 (10 punten). Voor $x, y \in \mathbb{R}$ schrijven we xRy dan en slechts dan als $\sin(5x) = \sin(5y)$.

- Bewijs dat R een equivalentierelatie is.
- Bereken de equivalentieklasse $[0]$.

Uitwerking 3. a) Zij $x \in \mathbb{R}$. Het is duidelijk dat $\sin(5x) = \sin(5x)$ dus xRx . De relatie is reflexief. Zij $x, y \in \mathbb{R}$ willekeurig. Als xRy , dan $\sin(5x) = \sin(5y)$ en dus ook $\sin(5y) = \sin(5x)$. Per definitie geldt dan yRx , de relatie is symmetrisch. Als laatste bewijzen we transitiviteit. Als xRy en yRz , dan $\sin(5x) = \sin(5y)$ en $\sin(5y) = \sin(5z)$, waaruit volgt dan $\sin(5x) = \sin(5z)$, en dus xRz . De relatie is dus transitief, en daarmee een equivalentierelatie.

b) Per definitie $[0] = \{y \in \mathbb{R} \mid 0Ry\}$. Als $y \in [0]$ dan geldt dus dat

$$0 = \sin(5y).$$

Dit betekent dat $5y = \pi k$ voor een $k \in \mathbb{Z}$. Dus $y = \pi k/5$. We concluderen dat $[0] \subseteq \{\frac{\pi k}{5} \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Omgekeerd, als $x \in \{\frac{\pi k}{5} \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\}$, dan geldt dat $\sin(5x) = \sin(\pi k)$ voor een $k \in \mathbb{Z}$, en dus dat $0 = x$. We hebben de andere inclusie bewezen en er volgt dat $[0] = \{\frac{\pi k}{5} \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Opgave 4 (15 punten). Zij $h : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ de functie gegeven door

$$h(x) = (x - 2)^2.$$

Voor onderdelen a) en b) hoeft je niets uit te leggen/bewijzen. Voor onderdeel c), d) en e) wel.

- Wat is het domein van h ?
- Wat is het codomein van h ?
- Wat is het bereik van h ?
- Wat is het beeld van $[2, 3]$ onder h ?
- Wat is het volledig origineel van $[2, 3]$ onder h ?

Uitwerking 4. De uitwerkingen zijn als volgt

- Het domein is $[1, 3]$
- Het codomein is $\mathbb{R}_{\geq 0}$.
- Het bereik is het beeld van het domein. Verder geldt: $h([1, 3]) = h([1, 2]) \cup h([2, 3])$. h is continu, monotoon dalend op $[1, 2]$ en monotoon stijgend op $[2, 3]$. Er geldt dus

$$h([1, 2]) = [h(2), h(1)] = [0, 1] \quad h([2, 3]) = [h(2), h(3)] = [0, 1].$$

Dus het bereik is $[0, 1]$.

- Uit het antwoord van (c) zien we dat $h([2, 3]) = [0, 1]$.
- Het volledig origineel is gedefinieerd als

$$h^{-1}([2, 3]) = \{x \in [1, 3] \mid h(x) \in [2, 3]\}$$

Maar het maximum van h is 1. Dus het volledig origineel is de lege verzameling.

Opgave 5 (15 punten). Zij A en B niet lege verzamelingen en $g : A \rightarrow B$ een functie. Zij $f : B \rightarrow A$ een linksinverse van g en $h : B \rightarrow A$ een rechtsinverse van g . Bewijs dat $f = h$.

Uitwerking 5. Let op dat f en h hetzelfde domein en codomein hebben. Omdat f een linksinverse is van g geldt dat $f \circ g = \mathbb{1}_A$. Omdat h een rechtsinverse is van g geldt $g \circ h = \mathbb{1}_B$. Nu volgt, ook gebruik makend van de associativiteit van de compositie, dat

$$f = f \circ \mathbb{1}_B = f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h = \mathbb{1}_A \circ h = h.$$

Opgave 6 (10 punten). Zij I een niet lege verzameling, en $\{A_i\}_{i \in I}$ en $\{B_i\}_{i \in I}$ families van verzamelingen geïndexeerd door I . Bewijs dat

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) - \left(\bigcup_{j \in I} B_j\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} (A_i - B_i).$$

Uitwerking 6. Zij $x \in (\bigcap_{i \in I} A_i) - (\bigcup_{j \in I} B_j)$, dan geldt dat $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ en $x \notin \bigcup_{j \in I} B_j$. Dus voor alle $k \in I$ geldt dat $x \in A_k$. Omdat $x \notin \bigcup_{j \in I} B_j$, geldt dat voor alle $k \in I$ dat $x \notin B_k$. Voor alle $k \in I$ is $x \in A_k - B_k$, dus $x \in \bigcap_{i \in I} (A_i - B_i)$.

Opgave 7 (10 punten). Bewijs dat, voor alle $k \in \mathbb{Z}$, geldt dat $k^2 \equiv k \pmod{2}$.

Uitwerking 7. Zij $k \in \mathbb{Z}$. Dan is $k^2 - k = k(k - 1)$. Het product $k(k - 1)$ is een product van twee opeenvolgende getallen. Er volgt dat of k is even, of $k - 1$ is even. Als k is even, dan $k = 2l$ voor een $l \in \mathbb{Z}$ en $k^2 - k = 2(l(2l - 1))$. Als $k - 1$ is even, dan $k - 1 = 2m$ voor een $m \in \mathbb{Z}$ en $k^2 - k = 2((2m + 1)m)$. In beide gevallen geldt dus dat $k^2 \equiv k \pmod{2}$.

Opgave 8 (10 punten). Voor $x, y \in \mathbb{Z}$ schrijven we $x \sim y$ dan en slechts dan als $|x - y| \leq 1$. Dit definieert een relatie op $\mathbb{Z}$.

- a) Is deze relatie symmetrisch? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.
- b) Is deze relatie transitief? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.
- c) Is deze relatie reflexief? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

Uitwerking 8. We behandelen de drie deelopgaven.

- a) Zij $x, y \in \mathbb{Z}$. Stel dat $x \sim y$, dan geldt dat $|x - y| \leq 1$. Uit de definitie van de absolute waarde volgt dat $|y - x| = |x - y|$. Dus $|y - x| = |x - y| \leq 1$, en we zien dat $y \sim x$. De relatie is symmetrisch.
- b) Deze relatie is niet transitief. $1 \sim 2$ en $2 \sim 3$, maar $|1 - 3| = |2| > 1$, dus $1 \not\sim 3$.
- c) Er geldt dat voor alle $x \in \mathbb{Z}$ dat $|x - x| = 0 \leq 1$ dus $x \sim x$. De relatie is reflexief.