

Opgelet

(1) Bij dit tentamen mag geen gebruik worden gemaakt van een rekenmachine, formuleblad, of enig ander hulpmiddel.

(2) Dit tentamen heeft 18 opgaven en bestaat uit twee gedeelten. Gebruik aparte vel(len) voor het gedeelte Basisbegrippen (14 t/m 18).

Basiswiskunde

- 1 Gebruik de binomiumwet van Newton om $(-x + 1)^5$ uit te rekenen.
- 2 Bereken $\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$.
- 3 Bereken exact $\cos(-\frac{1}{8}\pi)$.
- 4 Differentieer $f(x) = \arcsin(2x) - \frac{1}{\sqrt{x}}$.
- 5 Los op in $[0, 2\pi]$: $\cos(2x) = \cos x - 1$.
- 6 Los op $2x^4 - 7x^2 = 4$ (met x reëel).
- 7 Bereken z als $z = \frac{i-w}{w}$, met $w = 3 - 2i$ (antwoord in de vorm $a + bi$).
- 8 Bereken z^{10} als $z = 1 + i$ (antwoord in de vorm $a + bi$).
- 9 Los op door middel van kwadraatafsplitsen en met z in de vorm $a + bi$: $z^2 - 10z + 30 = 0$.
- 10 Los op in de vorm $z = a + bi$ de vergelijking $z^3 = -27$.
- 11 Los op in de vorm $z = a + bi$ de vergelijking $z^2 = 5 + 12i$.
- 12 Bewijs met volledige inductie dat $\sum_{k=3}^{2n} (2k - 1) = 4(n^2 - 1)$ voor elk geheel getal $n \geq 2$.
- 13 Bewijs met volledige inductie dat $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ deelbaar is door 7 voor elk natuurlijk getal n .

Basisbegrippen

- 14 Beschouw de verzameling van de rationale getallen $\mathcal{Q}$ en de verzameling van de reële getallen $\mathcal{R}$.
 - (a) Geef de definitie van zowel $\mathcal{Q}$ als $\mathcal{R}$ (informeel).
 - (b) Hoe kunnen we aan de decimale ontwikkeling van een reëel getal zien of het rationaal is?
 - (c) Toon aan dat $\sqrt{7} \notin \mathcal{Q}$.
 - (d) Schrijf het rationale getal $x = 0.478\overline{3}$ als een breuk en schrijf de breuk $5/14$ in een decimale ontwikkeling.
- 15 We kiezen de verzameling van de niet-negatieve gehele getallen $\mathcal{N}_0 := \mathcal{N} \cup \{0\}$ als ons universum. Laat $\mathcal{P}$ de verzameling zijn van alle priemgetallen, en $\mathcal{E}$ de verzameling van alle even getallen. We beschouwen de volgende vier beweringen.

$$\forall p \in \mathcal{P} \exists q \in \mathcal{P} : q = p + 2,$$

$$\forall n \in \mathcal{E} \exists p \in \mathcal{P} \cup \{0, 1\} \exists q \in \mathcal{P} \cup \{0, 1\} : n = p^2 + q^2,$$

$$\forall n \in \mathcal{N} \exists k \in \mathcal{N} \exists m \in \mathcal{N} : n = m^k + k^m,$$

$$\exists p \in \mathcal{P} \forall n \in \mathcal{N} \exists k \in \mathcal{N}_0 \exists m \in \mathcal{N}_0 : n = kp + m.$$

- (a) Beschrijf deze beweringen kort en bondig in *correct* Nederlands.
 (b) Bewijs of weerleg *al* deze beweringen.

16 Laat V een universum zijn en $A_1, A_2, A_3, \dots$ een rij deelverzamelingen van V . Laat B ook deelverzameling van V zijn.

- (a) Bewijs de volgende twee gelijkheden:

$$(i) \quad \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cap B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B) \quad (ii) \quad \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c.$$

- (b) Geef de namen van deze twee 'regels'.

17 Bij een badplaats komen 35 onderscheidbare toeristen aan die elk afzonderlijk een keuze maken uit één van de 10 aanwezige hotels.

- (a) Beschrijf netjes de verzameling Ω van alle mogelijke verdelingen van de toeristen over de hotels. Hoeveel elementen bevat Ω ?
 (b) Wat is het *aantal* 'uitkomsten' waarbij precies drie hotels leeg blijven? Geef een toelichting.

Laat nu de 35 toeristen bij de badplaats aankomen in een bus met 44 genummerde zitplaatsen. De chauffeur verdeelt de toeristen als volgt over de hotels. De toeristen die op de plaatsen 1 tot en met de eerste plaats zitten waarna een lege plaats volgt levert de chauffeur af in hotel 1 [als plaats 1 leeg is gaat er niemand naar hotel 1]. Vanaf de eerste lege plaats telt de chauffeur het aantal aansluitende lege plaatsen. Bij elke lege plaats gaat hij naar een volgend hotel. Dus als er precies drie lege opvolgende plaatsen zijn nadat hij toeristen bij hotel 1 heeft afgeleverd, stopt hij pas weer bij hotel 4. Zo gaat hij door totdat alle toeristen zijn afgeleverd. Om een voorbeeld te geven: stel de zitplaatsen 7,8,14,19,27,33,34,35,42 zijn onbezet; dan worden er 6 toeristen afgeleverd bij hotel 1, 0 bij hotel 2, 5 bij hotel 3, 4 bij hotel 4, 7 bij hotel 5, 5 bij hotel 6, 0 bij de hotels 7 en 8, 6 bij hotel 9 en 2 bij hotel 10.

- (c) Beschrijf opnieuw (netjes!) de verzameling Ω van de verschillende verdelingen van de *aantallen* toeristen over de 10 hotels. Hoeveel elementen bevat Ω ?
 (d) Wat is nu het *aantal* 'uitkomsten' waarbij precies twee hotels leeg blijven? Antwoord weer kort toelichten.

18 Laat $f : V \rightarrow W$ een functie zijn van een verzameling V naar een verzameling W . Zij gegeven $B_1 \subset W$ en $B_2 \subset W$.

- (a) Geef de definities van ' f is injectief', ' f is surjectief' en ' f is bijectief'.
 (b) Toon aan:

$$f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2].$$

Normering:

Basiswiskunde:

Som	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Totaal
Punten	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	30

Basisbegrippen:

Som	14a	14b	14c	14d	15a	15b	16a	16b	17a	17b	17c	17d	18a	18b	Totaal
Punten	1	1	1	1	$1\frac{1}{2}$	1	$2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	1	1	$\frac{1}{2}$	1	15

Cijfer = 1 + aantal punten / 5 .