

1. Toon aan dat  $\sqrt{6}$  geen rationaal getal is.
2. Laat gegeven zijn de volgende deelverzamelingen van  $\mathbb{N}$ 
  - $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x = 3k + 2\}$ ,
  - $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x = 5k + 3\}$ .
  - (a) Beschrijf in woorden welke getallen tot  $\mathcal{A}$  resp.  $\mathcal{B}$  behoren en schrijf van beide verzamelingen de eerste 10 elementen op.
  - (b) Geef nu de eerste 6 getallen van de verzamelingen  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ ,  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ ,  $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$  en  $\mathcal{A} \Delta \mathcal{B}$ .
  - (c) Toon aan dat voor elk getal  $x \in \mathcal{A}$  geldt dat  $x^2 + 1 \in \mathcal{A}$ .
  - (d) Schrijf 6 elementen op van  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ .
3. In een restaurant bevinden zich 8 echtparen die aan 4 *genummerde* tafels van 4 personen plaats nemen. Iedere persoon kiest een plaats. Geef elke persoon een nummer, bijvoorbeeld de man van echtpaar  $i$  nummer  $2i-1$  en de vrouw nummer  $2i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$ . We onderscheiden nu telkens twee gevallen: de stoelen zijn genummerd en de stoelen zijn ongenummerd.
  - (a) Beschrijf de verzameling van alle mogelijke uitkomsten  $\Omega$  voor dit 'experiment' als alle stoelen genummerd zijn. Wat is het *aantal* verschillende uitkomsten?
  - (b) Idem voor het geval de stoelen ongenummerd zijn? [De tafels blijven genummerd!!]
  - (c) Wat is het aantal verschillende uitkomsten, in het geval van genummerde stoelen, waarbij alle acht mannen aan precies twee tafels zitten?
  - (d) Wat is het aantal verschillende uitkomsten, in het geval van ongenummerde stoelen, waarbij alle echtparen bij elkaar aan eenzelfde tafel zitten? [De tafels blijven genummerd!!]
4. Laat  $f : V \longrightarrow W$  een functie zijn van een verzameling  $V$  naar een verzameling  $W$ . Zij gegeven  $A_1 \subset V$ ,  $A_2 \subset V$ ,  $B_1 \subset W$  en  $B_2 \subset W$ .
  - (a) Geef de definities van 'f is injectief', 'f is surjectief' en 'f is bijectief'.
  - (b) Laat  $f$  injectief zijn. Toon aan

$$f[A_1 \cap A_2] = f[A_1] \cap f[A_2].$$

Geef precies aan waar je de injectiviteit van  $f$  gebruikt. Geef een tegenvoorbeeld in geval  $f$  niet injectief is.

- (c) Laat  $f$  surjectief zijn. Definieer nu de functie  $f^* : W \longrightarrow \mathcal{P}(V)$  door  $f^*(y) := f^{-1}[\{y\}]$  voor alle  $y \in W$  [hier is  $\mathcal{P}(V)$  de machtsverzameling van  $V$ ]. Toon aan dat

$$(i) \ y_1 \neq y_2 \implies f^*(y_1) \cap f^*(y_2) = \emptyset \quad (ii) \ f^*[B_1 \cap B_2] = f^*[B_1] \cap f^*[B_2].$$

Zijn de volgende beweringen waar of onwaar? Het antwoord graag toelichten met een bewijs of een tegenvoorbeeld! [let op het verschil tussen ronde en rechte haakjes!!]

$$(iii) \ \forall x \in V : f^*(f(x)) = \{x\} \quad (iv) \ \forall y \in W : f[f^*(y)] = \{y\}.$$

## Puntenwaardering

| opgave | a. | b. | c. | d. |
|--------|----|----|----|----|
| 1.     | 20 | -  | -  | -  |
| 2.     | 5  | 5  | 5  | 5  |
| 3.     | 5  | 10 | 10 | 10 |
| 4.     | 10 | 5  | 10 | -  |

Het cijfer wordt als volgt berekend:

$$\text{eindcijfer} := \max(1, \text{round}(\text{puntentotaal}/10)).$$