

1. Toon aan dat $\sqrt{5}$ geen rationaal getal is.
2. Laat p, q en r proposities zijn. Ga na of de volgende uitspraken tautologieën zijn (geef de waarheidstabellen):
 - (a) $((p \rightarrow q) \vee r) \leftrightarrow ((p \vee r) \rightarrow (q \vee r))$
 - (b) $(\neg(p \wedge q) \vee r) \rightarrow (r \wedge (p \rightarrow q))$.
3. Zij V een verzameling bestaande uit n elementen (ofwel de cardinaliteit van V is n). Toon aan dat de cardinaliteit van de machtverzameling $\mathcal{P}(V) := \{X \mid X \subset V\}$ gelijk is aan 2^n .
4. Laat $f : V \longrightarrow W$ een functie zijn van een verzameling V naar een verzameling W . Zij gegeven $A_1 \subset V, A_2 \subset V, B_1 \subset W$ en $B_2 \subset W$.

(a) Toon aan

$$f[A_1 \cap A_2] \subset f[A_1] \cap f[A_2].$$

Laat aan de hand van een eenvoudig voorbeeld zien dat het gelijktteken in het algemeen niet geldt.

(b) Toon aan

$$f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2].$$

(c) Waar of onwaar? Hier is $A \subset V$ en $B \subset f[W]$. (alleen antwoorden!).

$$(i) f^{-1}[f[A]] = A, \quad (ii) f[f^{-1}[B]] = B.$$

5. Laat $A_1, A_2, \dots$ een rij deelverzamelingen zijn van een universum U . We definiëren de volgende verzamelingen,

$$\limsup A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$

$$\liminf A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

(a) Vul aan

$$\limsup A_n = \{x \in U \mid \forall n \in \mathbb{N} \dots\},$$

$$\liminf A_n = \{x \in U \mid \exists n \in \mathbb{N} \dots\}.$$

(b) Toon aan

$$\limsup A_n = \{x \in U \mid x \in A_n \text{ voor oneindig veel indices } n\},$$

$$\liminf A_n = \{x \in U \mid x \notin A_n \text{ voor slechts eindig veel indices } n\},$$

$$\liminf A_n \subset \limsup A_n.$$

- (c) Laat nu verder gegeven zijn dat de rij verzamelingen $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ monotoon stijgend is, d.w.z. $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \dots$. Toon nu aan

$$\limsup A_n = \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad (*)$$

- (d) Breng de noodzakelijke wijziging in $(*)$ aan voor het geval dat de rij $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ monotoon dalend is, d.w.z. $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \dots$

- (e) Zij f een functie van U naar U . Zeg van de onderstaande vier beweringen of ze waar of onwaar zijn [alleen antwoorden!].

$$f[\liminf A_n] = \liminf f[A_n], \quad f[\limsup A_n] = \limsup f[A_n],$$

$$f^{-1}[\liminf A_n] = \liminf f^{-1}[A_n], \quad f^{-1}[\limsup A_n] = \limsup f^{-1}[A_n].$$

Puntenwaardering

opgave	a.	b.	c.	d.	e.
1.	20	-	-	-	-
2.	10	10	-	-	-
3.	20	-	-	-	-
4.	10	10	10	-	-
5.	5	5	5	5	5

Het cijfer wordt als volgt berekend:

$$\text{eindcijfer} := \max(1, \min(10, \text{round}(\text{puntentotaal}/10))).$$

Merk op dat je in totaal 115 punten kunt halen. Opgave 5c. 5d. en 5e. zijn uitsmijters voor de liefhebbers. Ga hieraan pas werken als je alle andere opgaven af hebt en nog tijd over hebt.