Uitwerking tentamen Wasinbegrippen Wisk. de 22/12/03 (I)

1. We lossen dit vraagstuk op m.b.v. een waarheidstafel:

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$\neg p \wedge \neg q$	$p \Leftrightarrow \neg q$	$q \Leftrightarrow \neg r$	$r \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

Alleen in de derde rij hebben alle 3 equivalenties de waarheidswaarde 1; dus er geldt $w(p) = 0 = w(r)$, terwijl $w(q) = 1$.
(Het valt ook wel op een andere manier te beredeneren: Uit de gegevens volgt: p en q hebben verschillende w.w. én q en r hebben verschillende w.w.
Dus: p en r dezelfde w.w. én $\neg p \wedge \neg q$ altijd onwaar
Dus: $w(r) = 0$ en dus $w(p) = 0$ en $w(q) = 1$)

2. (i) Waar: Stel A, B en C willek. gegeven en stel $A \subset B \subset C$.
Veronderstel dat toch $(C \setminus B) \cap A \neq \phi$.
Neem dan een $x \in (C \setminus B) \cap A$. Dan $x \in C \setminus B$ én $x \in A$. Dus $x \in C$ én $x \notin B$ én $x \in A$. Dit laatste is in strijd met $A \subset B$. Dus moet wel gelden: $(C \setminus B) \cap A = \phi$.

(ii) Waar: Zij $x > 0$ willek. gegeven.
Neem nu $y = x^3 + \frac{3}{x}$. Dan geldt
$xy - 2 = x\left(x^3 + \frac{3}{x}\right) - 2 = x^4 + 3 - 2 = x^4 + 1 > x^4$.

(iii) Onwaar: Tegenvoorbeeld:
Neem $A = \{1\}$ en $B = \phi$ dan
$A \Delta B = \{1\} \Delta \phi = \{1\} = A$, maar toch $A \neq B$

3. (i) basis: We gaan na of de bewering waar is voor $n = 1$. Welnu: als $n = 1$ dan
$\sum_{k=2}^{n+2} \frac{2}{k(k+1)} = \sum_{k=2}^{3} \frac{2}{k(k+1)} = \frac{2}{2*3} + \frac{2}{3*4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$,
terwijl voor $n = 1$: $\frac{n+1}{n+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; dus voor $n = 1$ is de bewering juist.

(ii) inductie-stap: Stel dat de bewering waar is voor één of andere $m \in \mathbb{N}$, d.w.z.
stel dat $\sum_{k=2}^{m+2} \frac{2}{k(k+1)} = \frac{m+1}{m+3}$ voor één of andere $m \in \mathbb{N}$.
We willen nu bewijzen dat de bewering dan óók geldt voor de opvolger van m, dus voor $m+1$. M.a.w. we gaan nu bewijzen dat dan geldt:
$$\sum_{k=2}^{m+3} \frac{2}{k(k+1)} = \frac{m+2}{m+4}.$$
Alsdan:
$$\sum_{k=2}^{m+3} \frac{2}{k(k+1)} = \sum_{k=2}^{m+2} \frac{2}{k(k+1)} + \frac{2}{(m+3)(m+4)} \overset{!}{=}$$
$$= \frac{m+1}{m+3} + \frac{2}{(m+3)(m+4)} = \frac{(m+1)(m+4)+2}{(m+3)(m+4)} = \frac{m^2+5m+6}{(m+3)(m+4)} =$$
$$= \frac{(m+2)(m+3)}{(m+3)(m+4)} = \frac{m+2}{m+4},$$
waarmee de bewering voor $m+1$ is aangetoond.

4. (i) h is niet 1-1; h is wél op.

(ii) $g \circ f$ is wél 1-1; $g \circ f$ is niet op.
(bedenk $x \overset{f}{\longmapsto} (e^x, e^{-x}) \overset{g}{\longmapsto} (1+x, 1+x)$)

(iii) $(g \circ f)^{-1}\big[[0,1] \times [0,1]\big] = [-1, 0]$;
$(h \circ g \circ f)\big[[0,1]\big] = \{0\}$.

(Bedenk: $(h \circ g \circ f)(x) = h((1+x, 1+x)) = 0$.)

(II)

5. (i) $\binom{12}{1} * \binom{23}{2} = 12 * 23 * 11 \quad (= 3036)$

(ii) $\binom{12}{1} * \binom{23}{2} + \binom{11}{1} * \binom{22}{2} = 12 * 23 * 11 +$

$+ 11 * 11 * 21 \; (= 3036 + 2541 = 5577)$

6. <u>Methode 1</u>: A en B beide aftelbaar oneindig, dus er bestaan bijecties f resp. g van $\mathbb{N}$ op A resp. van $\mathbb{N}$ op B. Maak nu een bijectie h van $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ op $A \times B$ als volgt:

$$h(n, m) := (f(n), g(m)).$$

Het is niet moeilijk na te gaan dat h inderdaad 1-1 en op is.

<u>Methode 2</u>: Daar A en B aftelbaar oneindig zijn is $A \times B$ óók aftelbaar oneindig (St.) Evenzo is $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ aftelbaar oneindig! Maar dan zijn $A \times B$ en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gelijkmachtig en dus bestaat er een bijectie van $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ op $A \times B$.

7. a) Als $x_n \to L$ als $n \to \infty$ dan moet L voldoen aan $L = \sqrt[3]{6 + 7L}$ of wel $L^3 = 6 + 7L$ of wel $L^3 - 7L - 6 = 0$. Aan deze 3° graadsvergelijking voldoen $L = -1$, $L = -2$, en $L = 3$ (vul maar in) en meer dan 3 oplossingen kunnen er niet zijn.

b) (i) • $x_1 = 2 < 10$

• als $x_m < 10$ voor zekere m, dan $x_{m+1} = \sqrt[3]{6 + 7x_m} \overset{!}{<} \sqrt[3]{6 + 70} = \sqrt[3]{76} < 10$.

(ii) • $x_2 = \sqrt[3]{6 + 14} = \sqrt[3]{20} > x_1 = 2$ en als $x_{m+1} > x_m$ voor zekere m dan $x_{m+2} = \sqrt[3]{6 + 7x_{m+1}} \overset{!}{>} \sqrt[3]{6 + 7x_m} = x_{m+1}$

(iii) De rij is monotoon (stijgend) en begrensd, dus convergent volgens de Monotone Convergentie Stelling; zeg met limiet L. Dus (zie a): $L = -1 \vee L = -2 \vee L = 3$. Daar $x_1 = 2$ en de rij stijgt vallen -1 en -2 af. <u>Dus $L = 3$</u>.