



1. Gegeven zijn de proposities p, q en r . Er is bovendien gegeven dat de drie proposities

$$p \iff \neg q, \quad q \iff \neg r, \quad r \iff (\neg p \wedge \neg q)$$

alle waar zijn. Bereken de waarheidswaarde van p , van q en van r .

2. Bewijs of weerleg:

- (i) $\forall A, B, C \subset \mathbb{R} : A \subset B \subset C \implies (C \setminus B) \cap A = \emptyset$;
- (ii) $\forall x > 0 \quad \exists y > 0 : xy - 2 > x^4$;
- (iii) $\forall A, B \subset \mathbb{R} : A \triangle B = A \implies A = B$.

3. Toon aan, m.b.v. volledige inductie, dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\sum_{k=2}^{n+2} \frac{2}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+3}.$$

4. [U kunt in vraag 4 volstaan met het geven van de antwoorden]

Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty) \times (0, \infty)$ gegeven door $f(x) = (e^x, e^{-x})$.

Zij $g : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeven door $g(x, y) = (1 + \ln x, 1 - \ln y)$.

Zij $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $h(x, y) = x - y$.

- (i) Is h 1-1? Is h op?
- (ii) Is $g \circ f$ 1-1? Is $g \circ f$ op?
- (iii) Bereken $(g \circ f)^{-1}[[0, 1] \times [0, 1]]$ en $(h \circ g \circ f)[[0, 1]]$.

Z.O.Z.

5. [U kunt in vraag 5 volstaan met het geven van de antwoorden; in de antwoorden moeten binomiaalcoëfficiënten uitgewerkt worden.]

Het bureau “Hoe vind ik een Sint?” levert op aanvraag een Sint en Pieten uitsluitend in de samenstelling: 1 Sint en 2 Pieten. Het bureau heeft 35 mensen hiervoor beschikbaar.

Op hoeveel manieren kan het bureau zulke drietallen formeren uit die 35 werknemers in elk van de volgende gevallen:

- (i) 12 werknemers kunnen uitsluitend als Sint optreden en de overige 23 uitsluitend als Piet;
- (ii) 12 werknemers kunnen uitsluitend als Sint optreden; 12 werknemers uitsluitend als Piet en de overige 11 kunnen beide functies vervullen.

6. De verzamelingen A en B zijn beide aftelbaar oneindig. Laat zien dat er een bijectie bestaat van $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ op $A \times B$.

7. De rij $(x_n)_n$ is gegeven door:

$$x_1 = 2 \quad \text{en} \quad x_{n+1} = \sqrt[3]{6 + 7x_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- a) Toon aan: als de rij $(x_n)_n$ convergeert met limiet L , dan moet gelden: $L = -1$ of $L = -2$ of $L = 3$.
- b) (i) Toon aan: $\forall n \in \mathbb{N} : x_n < 10$.
- (ii) Toon aan: de rij $(x_n)_n$ is monotoon stijgend.
- (iii) Licht toe dat de rij $(x_n)_n$ convergeert en bepaal de limiet van de rij.

Normering:

$$1 : 4, \quad 2 : 7, \quad 3 : 6, \quad 4 : 5, \quad 5 : 3, \quad 6 : 3, \quad 7a) : 2, \quad 7b) : 6.$$

$$\text{Eindcijfer} := \frac{\text{Totaal}}{4} + 1.$$