Uitwerking tentamen Basisbegrippen Wiskunde 21/10/2003

(I)

1. We maken eerst maar eens een waarheidstabel:

p	q	r	$\neg q$	$\neg q \vee r$	$p \wedge (\neg q \vee r)$	$\neg(p \wedge (\neg q \vee r))$ *	$\neg p$	$\neg r$	$\neg p \vee q \vee \neg r$ **	$\ldots \Leftrightarrow \ldots$
0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0

Aangezien de laatste kolom niet uit louter enen bestaat, is de aangegeven equivalentie géén tautologie.
Men mag óók zeggen: de kolommen * en ** zijn niet gelijk, dus is het géén tautologie.
Men mag óók zeggen: als je $w(p) = w(q) = w(r) = 1$ neemt dan is het rechterlid v/d equivalentie waar, maar het linkerlid onwaar; dus kan het géén tautologie zijn.

2. (i) Waar. Bewijs: Zij $A \subset \mathbb{R}$ willekeurig gegeven.
Neem nu $B = A^c$. Dan geldt:
$$A \Delta B = A \Delta A^c = (A \cup A^c) \setminus (A \cap A^c) = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}.$$
En dus geldt: $(A \Delta B)^c = \emptyset$.

(ii) Onwaar. Tegenvoorbeeld: neem $x = y = -2$
dan geldt $|x| - |y+2| = 2 - 0 = 2$
terwijl $|x+2| + |y| = 0 + 2 = 2$
en dus geldt dan het $<$-teken niet.

(iii) Waar. Bewijs: Zij $x \in \mathbb{R}$ willekeurig gegeven.
Neem nu $y = 3 - x$. Dan geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$:
$$(x+y)^n = (x+3-x)^n = 3^n > 2^n.$$

3. Bewijs m.b.v. volledige inductie:
(i) basis: Neem $n = 1$. Dan geldt $\sum_{k=1}^{n+1}(2k+3) = \sum_{k=1}^{2}(2k+3) =$
$= 5 + 7 = 12$; terwijl voor $n=1$: $(n+1)(n+5) = 2 * 6 = 12$
dus voor $n = 1$ is de bewering waar.

(II)

3. (ii) inductie-stap: stel dat de bewering waar is voor één of andere $m \in \mathbb{N}$, d.w.z. stel dat
$$\sum_{k=1}^{m+1}(2k+3) = (m+1)(m+5) \text{ voor één of andere } m \in \mathbb{N}.$$
We willen nu bewijzen dat de bewering dan óók geldt voor de opvolger van m, dus voor $m+1$. M.a.w. we gaan nu bewijzen dat dan geldt:
$$\sum_{k=1}^{m+2}(2k+3) = (m+2)(m+6).$$
Aldus: $\sum_{k=1}^{m+2}(2k+3) = \sum_{k=1}^{m+1}(2k+3) + 2(m+2)+3 \overset{!}{=}$
$= (m+1)(m+5) + 2m + 7 = m^2 + 6m + 5 + 2m + 7 =$
$= m^2 + 8m + 12 = (m+2)(m+6)$, waarmee de bewering voor $m+1$ is aangetoond.

4. (i) f is niet 1-1 ; f is niet op.
(ii) g is niet 1-1 ; g is wel op.
(iii) $(g \circ f)[\{0,1\} \times \{0,1\}] = \{0, 1, -1\}$
$$(g \circ f)^{-1}[\{0,1\}] = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,x-1) \mid x \in \mathbb{R}\}$$
(Men mag in dit laatste geval ook zeggen: 2 evenwijdige rechten in het platte vlak, nl. die met vgl. $y = x$ en die met vgl. $y = x-1$)

Bedenk hierbij:
$$(x,y) \xmapsto{f} (y-x, x-y) \xmapsto{g} x-y$$
dus $(g \circ f)(x,y) = x - y$.

5. (i) 15 (nl. $\binom{6}{2}$ of $\binom{6}{4}$)

(ii) 10 (nl. $\binom{6}{3}/2$)

6. Zij f gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{als } x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{als } x \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

Dan $f[\mathbb{R}] = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$ en dus aftelbaar oneindig

terwijl

$(f \circ f)[\mathbb{R}] = \{0\}$ dus eindig.

7. (i) – de rij $(x_n)_n$ is naar boven begrensd door bijv. 10

immers: $x_1 = 4 < 10$ en als $x_m < 10$ voor één of andere $m \in \mathbb{N}$ dan $x_{m+1} = \sqrt{x_m + 56} \overset{!}{<} \sqrt{66} < 10$

– de rij $(x_n)_n$ is monotoon stijgend. Immers:

$x_1 = 4 < x_2 = \sqrt{60}$ en als $x_m < x_{m+1}$

voor één of andere $m \in \mathbb{N}$ dan

$x_{m+1} = \sqrt{x_m + 56} \overset{!}{<} \sqrt{x_{m+1} + 56} = x_{m+2}$

(ii) De rij $(x_n)_n$ is volgens (i) monotoon en begrensd; dus volgens de Monotone Convergentie Stelling convergent (zeg met limiet L). Dan $x_n \to L$ en dus ook $x_{n+1} \to L$ en $\sqrt{x_n + 56} \to \sqrt{L + 56}$ als $n \to \infty$

L moet dus voldoen aan: $L = \sqrt{L + 56}$ dus

$L^2 - L - 56 = 0$ dus $(L - 8)(L + 7) = 0$ dus

$\underline{L = 8}$ $\vee$ $\underline{L = -7}$. Daar $x_1 = 4$ en de rij stijgt is $L = -7$ uitgesloten. Er moet dus wel gelden: $\underline{L = 8}$