Uitwerking 2e deeltentamen (D2) Basisbegrippen Wiskunde (I

22/10/2001

1. (i) $\binom{36}{11} * 11!$

(ii) $\left(\binom{19}{5}\binom{17}{6} + \binom{19}{6}\binom{17}{5}\right) * 11!$

(Let op: $\binom{19}{5}\binom{17}{5} * 26 * 11!$ is FOUT)

(iii) $19 * \binom{17}{3} * 3! * \binom{32}{7} * 7!$

2. (i)
f niet 1-1 wel op
g wel 1-1 niet op
h niet 1-1 niet op

(ii) $f[A] = \mathbb{R}$ $\qquad g^{-1}[A] = \{(0,0)\}$

(iii) $(g \circ h \circ f)\left[[0,1]^3\right] = \{(t,0,0) \mid 0 \le t \le 8\}$;

$(f \circ g \circ h)^{-1}\left[(-3,8]\right] = [-2,+2]$

3. (i) Definieer de afbeelding $f : A \to B$ door
$f(n) = n - 14$
Deze afbeelding is 1-1 en op, dus een bijectie
Dus A is gelijkmachtig met B.

(ii) Definieer de afbeelding $f : \mathbb{N} \to A$ door
$f(n) = n + 10$
Deze afbeelding is 1-1 en op, dus een bijectie
Dus A is gelijkmachtig met $\mathbb{N}$; dus aftelbaar.

(iii) <u>Methode 1</u>: A is gelijkmachtig met B; A is aftelbaar;
dan is B het óók.

<u>Methode 2</u>: Definieer de afbeelding $f : \mathbb{N} \to B$
door $f(n) = n - 4$.
f is 1-1 en op; dus bijectie.

(II)

4. $f^{(12)}(x) = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (x^2+1)^{(k)} (\cos x)^{(12-k)}$ reduceert tot 3 termen; nl. met $k = 0, 1$ en 2.

$= (x^2+1)(\cos x)^{(12)} + 12 * 2x\, (\cos x)^{(11)} + 132\,(\cos x)^{(10)} =$

$= (x^2+1)\cos x + 24x\,(\sin x) - 132 \cos x$ $\quad \underline{\text{Vul in } x = \pi/2}$

$= 24 * \frac{\pi}{2} * 1 = 12\pi$

5. (i) A en B zijn beide begrensd; dus $\exists\, K, L \in \mathbb{R}$:

$\forall a \in A: |a| \leq K$ en $\forall b \in B: |b| \leq L$

Maar dan geldt: $\forall a \in A\ \forall b \in B$:

$|ab| = |a| \cdot |b| \leq K \cdot L$

dus $A * B$ is óók begrensd

(ii) <u>Onwaar</u>: Stel $A = \{-1, 0\} = B$ dan $A*B = \{0, 1\}$

en dus $\sup(A*B) = 1 \neq \sup A \cdot \sup B = 0 \cdot 0 = 0$

6. (i) • $b_2 = \sqrt{4b_1 - 3} = \sqrt{8-3} = \sqrt{5} > 2 = b_1$

• Stel $b_{m+1} > b_m$ voor één of andere $m \in \mathbb{N}$ dan

$b_{m+2} = \sqrt{4b_{m+1} - 3} \overset{!}{>} \sqrt{4b_m - 3} = b_{m+1}$.

(ii) $=$ $\forall n \in \mathbb{N}: b_n \geq b_1 = 2 > 1$ dus elke $b_n \geq 2 > 1$

$=$ • $b_1 = 2 < 3$

• Stel $b_m < 3$ voor één of andere $m \in \mathbb{N}$ dan

$b_{m+1} = \sqrt{4b_m - 3} \overset{!}{<} \sqrt{12 - 3} = \sqrt{9} = 3$

(iii) De rij is monotoon stijgend en begrensd, dus (volgens MCS) convergent; zeg met limiet L.

L moet voldoen aan $L = \sqrt{4L - 3}$ dus $L^2 - 4L + 3 = 0$

Dus $L = 1 \vee L = 3$. Daar elke $b_n \geq 2$ moet wel $\underline{L = 3}$