

1. M.b.v. een waarheidstabel:

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	$p \vee q \vee r$	$(\dots) \Rightarrow (\dots)$
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1	1

In de laatste kolom komt een 0 voor; er is dus geen sprake van een tautologie.

Korter: als $w(p) = w(q) = 0$ en $w(r) = 1$ dan ziet men ook direct dat de implicatie onwaar is.

2. (i) Onwaar: immers neem bijv. $x = -2$; dan geldt $x^2 + 4x + 3 = -1$ en voor die x geldt dan: $\forall y \in \mathbb{R}: y^2 > x^2 + 4x + 3 = -1$

(ii) Waar: Zij $x \in \mathbb{N}$ en $y \in \mathbb{Z}$ willekeurig gegeven. Neem nu $z = x + |y| + 23$ dan zeker $z \in \mathbb{N}$ en bovendien $z > x + |y| \geq x + y$.

3. (i) Waar: Neem willekeurige $A, B \subset \mathbb{R}$.

Stel dat $(A \cap B) \cap (A \Delta B) \neq \emptyset$.

Dan $\exists p \in (A \cap B) \cap (A \Delta B)$. Dan $p \in A \cap B$ en $p \in A \Delta B$.
 Maar: als $p \in A \cap B$ dan $p \in A$ en $p \in B$ en dan $p \notin A \setminus B$ en $p \notin B \setminus A$ dan $p \notin A \Delta B$. Tegenspraak.

Dus er moet wel gelden: $(A \cap B) \cap (A \Delta B) = \emptyset$

(ii) Kies willekeurige $A, B, C \subset \mathbb{R}$. Dan geldt

Waar: $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) = A \cap (B^c \cup C^c)$
 $= A \cap (B \cap C)^c$; alles op grond van bekende rekenregels.

4. Zij $g(x) = 3x + 5$ en $h(x) = e^{2x}$ dan

$$f^{(7)} = (g \cdot h)^{(7)} \underset{\text{Leibn.}}{=} \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} g^{(k)} h^{(7-k)} \quad \text{reduceert tot 2 termen nl. met } k=0,1$$

$$= \binom{7}{0} g h^{(7)} + \binom{7}{1} g' h^{(6)} =$$

$$= (3x+5) 2^7 e^{2x} + 7 \cdot 3 \cdot 2^6 e^{2x}. \quad \text{Vul nu } x=1 \text{ in:}$$

$$f^{(7)}(1) = 0 \cdot 2^7 \cdot e^2 + 21 \cdot 2^6 \cdot e^2 = \underline{e^2 (0 \cdot 2^7 + 21 \cdot 2^6)}$$

5. (i) Zij $B := A \cup \{\sup A\}$.

Daar $\sup A$ een bovenpers van A is, heeft $A \cup \{\sup A\}$ een maximum, nl. $\sup A$. Dus

$$\sup (A \cup \{\sup A\}) = \sup B = \max B = \sup A.$$

(ii) Onwaar:

Nem bijv. $A = \{0, 1\}$.

$$\text{Dan } \sup A = 1 \neq \sup (A \setminus \{\sup A\}) = 0.$$

$$6. (i) \bullet \quad b_2 = \frac{b_1^2 + 3}{4} = \frac{4+3}{4} = \frac{7}{4} < 2 = b_1,$$

\bullet Stel $b_{m+1} < b_m$ voor zekere $m \in \mathbb{N}$

$$\text{dan } b_{m+2} = \frac{b_{m+1}^2 + 3}{4} < \frac{b_m^2 + 3}{4} = b_{m+1}$$

(ii) De rij $(b_n)_n$ is monotoon dalend en naar beneden begrensd (alle termen > 0) dus volgens de Monotone Convergentie Stelling is de rij convergent; zeg met limiet L .

(iii) Wezen $b_{n+1} = \frac{b_n^2 + 3}{4}$ voldoet L aan de vgl.

$$4L = L^2 + 3 \quad \text{of wel} \quad L^2 - 4L + 3 = 0 \quad \text{dus}$$

$$L = 1 \vee L = 3. \quad \text{Daar } b_1 = 2 \text{ en de rij}$$

dalend is valt $L = 3$ af. Dus: $L = 1$