

Duur: 2 uur.

1. Bewijs of weerleg:

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \text{ is een tautologie.}$$

2. Bewijs of weerleg:

(i) $\forall A, B, C, D \subset \mathbb{R} :$

$$(((A \setminus C) \times B) \cup (A \times (B \setminus D))) \subset (A \times B) \setminus (C \times D) ;$$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : (x+y)^n > 4^{2n} .$

3. (Antwoorden volstaan in som 3).

Gegeven zijn de twee volgende functies:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ door } f(x, y) = (-y, y-x) ;$$

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ door } g(x, y) = x^2 - y^2 .$$

(i) Is f injectief? Surjectief?

Is g injectief? Surjectief?

(ii) Bereken:

a) $(g \circ f) \left[\left\{ (x, 0) \mid x \in \mathbb{R} \right\} \right] ;$

b) $(g \circ f)^{-1} [\{0\}] .$

4. Zij $f(x) = \sin 2x + \cos 2x$.

Men kan, bijvoorbeeld met behulp van volledige inductie, aantonen dat voor de $(2n)^e$ afgeleide $f^{(2n)}$ van f geldt:

$$f^{(2n)}(x) = (-4)^n f(x) \quad (n \in \mathbb{N}) .$$

(Dit hoeft u niet aan te tonen!)

Zij $g(x) = xf(x)$.

Bereken, met behulp van de formule van Leibniz, de $(2n)^e$ afgeleide $g^{(2n)}$ van g .

(U mag hierbij o.a. gebruik maken van de gegeven formule voor $f^{(2n)}$.)

- 5) a) Geef een concreet voorbeeld van 2 disjuncte aftelbaar oneindige verzamelingen A en B en laat zien dat $A \cup B$ óók aftelbaar oneindig is.
 b) Laat P en Q niet-lege begrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn.
 Toon aan: $P \subset Q \Rightarrow \sup P \leq \sup Q$.

6. Een dagblad schrijft een literaire prijsvraag uit. Er komen 300 foutloze oplossingen binnen. Er zijn 6 prijzen beschikbaar. Door willekeurige trekking van 6 oplossingen uit de 300 binnengekomen oplossingen worden de 6 prijswinnaars bepaald.

Hoeveel verschillende prijstoeckenningen zijn er mogelijk, als:

- (i) De 6 prijzen alle 6 verschillend zijn;
 (ii) Er 2 (onderling gelijke) eerste prijzen zijn en 4 (onderling gelijke) tweede prijzen zijn.
 (Antwoorden volstaan in deze som 6; in de antwoorden hoeven binomiaalcoëfficiënten niet uitgewerkt te worden.)

7. De rij $(a_n)_n$ is gegeven door:

$$a_1 = 5 \text{ en } a_{n+1} = \sqrt{6a_n - 8} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

- (i) Toon aan: $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > 4$.
 (ii) Toon aan: De rij $(a_n)_n$ is monotoon dalend.
 (iii) Licht toe dat de rij $(a_n)_n$ convergeert.
 (iv) Bepaal de limiet van de rij $(a_n)_n$.

Normering:	1: 4	2(i): 4	3(i): 3	4: 6	5a: 4	6: 4	7: 8
		(ii): 4	(ii): 4		b: 4		
	$\frac{\quad}{4}$	$\frac{\quad}{8}$	$\frac{\quad}{7}$	$\frac{\quad}{6}$	$\frac{\quad}{8}$	$\frac{\quad}{4}$	$\frac{\quad}{8}$

Eindcijfer: $\frac{\text{Totaal}}{5} + 1$