Uitwerking 2^e deeltentamen (D2) Basisbegrippen
Wiskunde 25 - 10 - 2000

1. (i) $\binom{40}{4}$ $\left(= \frac{40 * 39 * 38 * 37}{4 * 3 * 2} = 10 * 13 * 19 * 37 = \right.$
$\left. = 91.390 \right)$

(ii) $\binom{15}{1} * \binom{25}{3} + \binom{15}{2} * \binom{25}{2}$ $(= 15 * 2300 +$
$+ 105 * 300 = 66.000)$

(iii) $\left(\binom{15}{2} - \binom{10}{2}\right) * \left(\binom{25}{2} - \binom{10}{2}\right)$ $(= 60 * 255 = 15.300)$

2. (i) f is niet 1-1, wél op
g is wél 1-1, niet op
h is niet 1-1, niet op

(ii)
- $\{0,1\}$
- $\mathbb{R}$
- $[0,\infty)$

3. B is gelijkmachtig met A (gegeven), dus er bestaat een bijectie f van B op A.
A is gelijkmachtig met $\mathbb{N}$ (zie syllabus), dus er bestaat een bijectie g van A op $\mathbb{N}$ (neem bijv. $g(2n) = n$ als afbeelding)
De compositie $g \circ f$ is een afbeelding van B naar $\mathbb{N}$ die ook 1-1 en op is dus een bijectie van B op $\mathbb{N}$; dus B is gelijkmachtig met $\mathbb{N}$.

4. Zij $g(x) = 3x+5$ en $h(x) = e^{2x}$ dan

$$f^{(7)} = (g \cdot h)^{(7)} \underset{\text{Leibn.}}{=} \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} g^{(k)} h^{(7-k)}$$ reduceert tot 2 termen nl. met $k = 0,1$

$$= \binom{7}{0} g\, h^{(7)} + \binom{7}{1} g'\, h^{(6)} =$$

$$= (3x+5)\, 2^7 e^{2x} + 7 \cdot 3 \cdot 2^6 e^{2x}.$$ Vul nu $x=1$ in:

$$f^{(7)}(1) = 8 \cdot 2^7 \cdot e^2 + 21 \cdot 2^6 \cdot e^2 = \underline{e^2 \left(8 \cdot 2^7 + 21 \cdot 2^6\right)}$$

5. (i) Zij $B := A \cup \{\sup A\}$.
Daar $\sup A$ een bovengrens van A is, heeft $A \cup \{\sup A\}$ een maximum, nl. $\sup A$. Dus
$\sup(A \cup \{\sup A\}) = \sup B = \max B = \sup A$.

(ii) Onwaar:
Neem bijv. $A = \{0,1\}$.
Dan $\sup A = 1 \neq \sup(A \setminus \{\sup A\}) = 0$.

6. (i) • $b_2 = \dfrac{b_1^2+3}{4} = \dfrac{4+3}{4} = \dfrac{7}{4} < 2 = b_1$

• Stel $b_{m+1} < b_m$ voor zekere $m \in \mathbb{N}$
dan $b_{m+2} = \dfrac{b_{m+1}^2+3}{4} \overset{!}{<} \dfrac{b_m^2+3}{4} = b_{m+1}$

(ii) De rij $(b_n)_n$ is monotoon dalend en naar beneden begrensd (álle termen >0) dus volgens de Monotone Convergentie Stelling is de rij convergent; zeg met limiet L.

(iii) Wegens $b_{n+1} = \dfrac{b_n^2+3}{4}$ voldoet L aan de vgl.
$4L = L^2+3$ of wel $L^2 - 4L + 3 = 0$ dus
$L = 1 \vee L = 3$. Daar $b_1 = 2$ én de rij dalend is valt $L=3$ af. Dus: $L = 1$