

Uitwerking 1^e deeltentamen (D1) Basisbegrippen Wiskunde 27/9/00

1. m.b.v. een waarheidstabel:

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Hieruit zien we dat, bijv. als p en r onwaar en q waar dan is $(p \wedge q) \Rightarrow r$ waar, maar $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ onwaar. De getoonde equivalentie kan dus geen tautologie zijn.

2. (i) Waar: Zij $x > 2$ willek. gegeven. Neem nu $y = x + 2$.
Dan geldt: $xy - y = y(x - 1) = (x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2 > x^2$ want $x - 2 > 0$.

(ii) Onwaar: Neem $x = 1$ dan geldt voor elke $y \in \mathbb{R}$:
 $xy - y = y - y = 0 \neq 1^2 = x^2$. Dus:
 $\exists x > 0 \forall y \in \mathbb{R} : xy - y \neq x^2$ en dat is precies de ontkennning van de gegeven bewering.

3. (i) Waar: Zij $A \subset \mathbb{R}$ willek. gegeven. Neem nu $B = \emptyset$ dan geldt $A \setminus B = A \setminus \emptyset = A$
en $A \Delta B = A \Delta \emptyset = A$.

(ii) Waar: Zij $A \subset \mathbb{R}$ willek. gegeven. Neem nu $B = A$ dan geldt $A \setminus B = A \setminus A = \emptyset$
en $A \Delta B = A \Delta A = \emptyset$.

(iii) Waar: Laat A, B en C willek. gegeven zijn.
Dan geldt (m.b.v. bekende rekenregels):
 $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cap C^c) \cup (B \cap C^c) \stackrel{\text{distrib. eig.}}{=} (A \cup B) \cap C^c$.

Z.O.Z.

4. Kies willek $y \in B$ en kies ook een willek $x \in A$
 (Dat kan, want elke vers. niet-leeg)
 Dan $(x, y) \in A \times B = C \times A$ dan $x \in C$ en $y \in A$.
 In feite hebben we nu bewezen $B \subset A$ en $A \subset C$
 Dus ook geldt nu: $B \subset C$.
 Op dezelfde wijze toont men aan: $C \subset A$ en $A \subset B$
 Dus ook geldt: $C \subset B$.
 Dus geldt ten slotte $B = C$ (en $B = A$)

5. Onwaar: Neem bijv $A = B = C = \{1\}$
 dan $A \cup B \cup C = A \cap B \cap C = \{1\}$, maar
 er geldt niet: $1 = 1 + 1 + 1 - 1$

6. (i) basis: we controleren de bewering voor $n=1$:

$$\sum_{k=1}^1 (3k^2 - 3k + 1) = 3 - 3 + 1 = 1 = 1^3 = n^3$$

 dan voor $n=1$ is de bewering juist.

(ii) inductie-stap: Stel de bewering is juist voor
 zeker $m \in \mathbb{N}$; d.w.z.

$$\sum_{k=1}^m (3k^2 - 3k + 1) = m^3$$
. We proberen dan
 vervolgen de bewering te bewijzen voor de opvolger van
 m , dan voor $m+1$. Aldus:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} (3k^2 - 3k + 1) &= \sum_{k=1}^m (3k^2 - 3k + 1) + 3(m+1)^2 - 3(m+1) + 1 \\ &\stackrel{!}{=} m^3 + 3(m+1)^2 - 3(m+1) + 1 = m^3 + 3m^2 + 6m + 3 + \\ &- 3m - 3 + 1 = m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = (m+1)^3 \end{aligned}$$

(binomium van Newton)

(iii) Op grond v/h principe van volledige inductie
 is de bewering dan juist voor elke $n \in \mathbb{N}$.