

Uitwerking Herkansingstentamen Basisbegrippen Wiskunde
(Wisk./Echt.) 23-12-1999 (I)

1.

p	q	$p \wedge q$	$\neg q$	$p \Rightarrow \neg q$	$(p \Rightarrow \neg q) \wedge (p \wedge q)$	$\neg(\dots \wedge \dots)$
0	0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1

Voor alle mogelijke waardswaarden van p en q is de gegeven bewering dus waar; het is dus een tautologie.

2. a) (i) Waar: Neem willek. verz. A en B . Dan geldt:

$$\boxed{C}: A \cap B \subset A \cup B \text{ en } A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B);$$

dus ook $A \Delta B \subset A \cup B$. Dus:
 $(A \cap B) \cup (A \Delta B) \subset A \cup B$.

$$\boxed{D}: \text{Zij } x \in A \cup B \text{ willek. gekozen.}$$

Dan $x \in A$ of $x \in B$. Dan zijn er 3 mogelijkheden:

- $x \in A$ en $x \in B$. Dan $x \in A \cap B$
- $x \in A$ en $x \notin B$. Dan $x \in A \setminus B$
- $x \notin A$ en $x \in B$. Dan $x \in B \setminus A$

$$\text{Dus } x \in (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B) \cup (A \Delta B)$$

(ii) Onwaar: Tegenvoorbeeld:

$$\text{Neem } A = C = D = \{1\} \text{ en } B = \emptyset$$

$$\text{Dan } (A \setminus B) \times (C \setminus D) = \{1\} \times \emptyset = \emptyset \text{ maar}$$

$$(A \times C) \setminus (B \times D) = \{(1,1)\} \setminus \emptyset = \{(1,1)\} \neq \emptyset$$

2. b) (i) Onwaar: Neem nl. $x = 1$ dan geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 2$:

$$nx - \frac{x}{n} = n - \frac{1}{n} \geq 2 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} > 1$$

(ii) Waar: Neem een willek. $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 2$.

$$\text{Dan } n - \frac{1}{n} > 0. \text{ Zij nu } x = \frac{2}{n - \frac{1}{n}}$$

$$\text{Dan } x > 0 \text{ en } x(n - \frac{1}{n}) = nx - \frac{x}{n} = 2.$$

3. (i) basis: voor $n = 1$ geldt:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^1 \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \text{ en}$$

$$2 - \frac{n+2}{2^n} = 2 - \frac{1+2}{2^1} = 2 - \frac{3}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

den voor $n = 1$ is de bewering juist.

(ii) inductie-stap: Neem aan de bewering juist is voor één of andere $m \in \mathbb{N}$. Dan geldt voor de opvolger van m , den voor $m+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{2^k} &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{2^k} + \frac{m+1}{2^{m+1}} \stackrel{!}{=} 2 - \frac{m+2}{2^m} + \frac{m+1}{2^{m+1}} = \\ &= 2 - \left(\frac{2(m+2) - (m+1)}{2^{m+1}} \right) = 2 - \frac{m+3}{2^{m+1}}, \end{aligned}$$

den voor $m+1$ is de bewering dan ook juist.

4. a) g is wél injectief, maar niet surject.
 h is niet injectief, maar wél surject.

b) (i) $[1, 2]$

(ii) $\emptyset$.

5. (i) $\binom{10}{7} = \frac{10 * 9 * 8}{6} = \underline{\underline{120}} ;$

(ii) $\binom{5}{3} * \binom{5}{4} = 10 * 5 = \underline{\underline{50}} ;$

(iii) $\binom{5}{3} * \binom{5}{4} + \binom{5}{4} * \binom{5}{3} + \binom{5}{5} * \binom{5}{2} =$
 $= 10 * 5 + 5 * 10 + 1 * 10 = \underline{\underline{110}} .$
 $(= 120 - 10).$

6. We tonen dit aan door een bijjectie te definiëren van N op A . Bijv. als volgt:

$$f(1) = 1 \text{ en}$$

$$f(n) = 2(n-1) \text{ als } n \geq 2.$$

als $n_1 \neq n_2$ en $n_1 \geq 2$ en $n_2 \geq 2$ dan

$$f(n_1) \neq 1 = f(1) \text{ en } f(n_1) = 2(n_1-1) \neq 2(n_2-1) = f(n_2)$$

dan f is zeker injectief.

f is ook surjectief: immers hier willen $m \in A$.

als $m = 1$ dan $f(1) = 1 = m$

als $m = 2n$ dan $f(n+1) = 2(n+1-1) = 2n = m$

7. Onwaar: Neem bijv. $A = (0, 4)$
 dan $\sup A = 4$ en $\inf A = 0$

$$\text{dan } \sup A - \inf A = 4 - 0 = 4.$$

Ochter; voor elke $x, y \in A$ geldt:

$$0 < x < 4 \text{ en } 0 < y < 4$$

$$\text{dan } x - y < 4 \text{ dan } x - y \neq 4$$

d. $f^{(9)}(x) = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} (5x+4)^{(k)} (e^{3x})^{(9-k)} \quad \text{IV}$

Sam reduceert
tot 2 termen;
nl met $k=0, 1$.

$$+ \binom{9}{1} \cdot 5 \cdot (e^{3x})^{(8)} = (5x+4) \cdot 3^9 \cdot e^{3x} +$$

$$+ 9 \cdot 5 \cdot 3^8 \cdot e^{3x} \quad \text{invullen}$$

$$= 4 \cdot 3^9 + 15 \cdot 3^9 = \underline{\underline{19 \cdot 3^9}}$$

9. (i) • M.b.v. inductie:

$$a_1 = 1 < 10 \quad \text{en} \quad \text{als} \quad a_m < 10$$

$$\text{voor elke } m \in \mathbb{N} \text{ dan } a_{m+1} = \sqrt{56 + a_m}$$

$$\stackrel{!}{<} \sqrt{56 + 10} < \sqrt{100} = 10$$

• M.b.v. inductie:

$$a_2 = \sqrt{57} > a_1 \quad \text{en} \quad \text{als} \quad a_{m+1} > a_m$$

$$\text{voor elke } m \in \mathbb{N} \text{ dan } a_{m+2} = \sqrt{56 + a_{m+1}}$$

$$\stackrel{!}{>} \sqrt{56 + a_m} = a_{m+1}.$$

(ii) De rij (a_n) is monotoon + begrensd, dus
(Monot. Conv. Stelling) convergeert.

(iii) Noem de limiet L . Dan geldt:

$$L = \sqrt{56 + L} \quad \text{dan} \quad L^2 - L - 56 = 0 \quad \text{dan}$$

$$(L - 8)(L + 7) = 0 \quad \text{dan} \quad L = 8 \vee L = -7$$

Daar elke $a_n \geq 1$ moet wel gelden $L = 8$