

Duur: 3 uur.

1. Bewijs, met behulp van een waarheidstabel:

$\neg((p \Rightarrow \neg q) \wedge (p \wedge q))$ is een tautologie.

2. a) Bewijs of weerleg:

(i) $\forall A, B: (A \cap B) \cup (A \Delta B) = A \cup B$;

(ii) $\forall A, B, C, D: (A \setminus B) \times (C \setminus D) = (A \times C) \setminus (B \times D)$.

- b) Bewijs of weerleg:

(i) $\forall x > 0 \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : nx - \frac{x}{n} = 1$;

(ii) $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \exists x > 0 : nx - \frac{x}{n} = 2$.

3. Toon aan, met behulp van volledige inductie, dat voor iedere $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n} .$$

4. Gegeven zijn de functies:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) = \arctan x$;

$g: \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^2$ met $g(x) = (\tan x, 1 + \tan x)$;

$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ met $h(x, y) = (x - y)^2$.

(Antwoorden volstaan in deze opgave!)

- a) Is g injectief? Is g surjectief?
Dezelfde vragen voor h .

Z.O.Z.

b) Bepaal, voorzover welgedefinieerd:

(i) $(g \circ f)^{-1} [[1, 3] \times [1, 3]]$;

(ii) $(f \circ h \circ g)^{-1} [\{0, 1\}]$.

5. Een tentamen Wiskunde bestaat uit 10 vragen. Een deelnemende student dient (op willekeurige wijze) hiervan precies 7 vragen uit te kiezen (en te beantwoorden).

Bepaal het aantal verschillende manieren waarop dat kan, in elk der volgende gevallen:

(U kunt volstaan met het geven van de antwoorden)

(i) Er worden verder geen beperkingen opgelegd.

(ii) Uit de eerste 5 vragen moeten er precies 3 (van de 7) gekozen worden.

(iii) Uit de eerste 5 vragen moeten er tenminste 3 (van de 7) gekozen worden.

6. Zij $A = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$.

Toon aan: A is gelijkmachting met $\mathbb{N}$.

7. Zij A een niet-lege, begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$. Bovendien geldt: $\sup A - \inf A = 4$.

Bewijs of weerleg:

$$\exists x, y \in A : x - y = 4 .$$

8. Zij $f(x) = (5x + 4)e^{3x}$.

Bepaal, met behulp van de formule van Leibniz, de 9e afgeleide van f in het punt $x = 0$.

9. De rij (a_n) is gegeven door:

$$a_1 = 1 \text{ en } a_{n+1} = \sqrt{56 + a_n} \quad (n \in \mathbb{N}) .$$

(i) Toon aan: a. De rij is naar boven begrensd.

b. De rij is monotoon stijgend.

(ii) Waarom is de rij convergent?

(iii) Bepaal de limiet van de rij.

Normering: 1: 4 2a: 5 3: 6 4a: 2 5: 6 6: 4 7: 4 8: 6 9: 7

b: 6 b: 4

$\frac{\quad}{4}$ $\frac{\quad}{11}$ $\frac{\quad}{6}$ $\frac{\quad}{6}$ $\frac{\quad}{6}$ $\frac{\quad}{4}$ $\frac{\quad}{4}$ $\frac{\quad}{6}$ $\frac{\quad}{7}$

Eindcijfer: $\frac{\text{Totaal}}{6} + 1$