

(I)

Uitwerking 1^e deeltentamen (D1) Basisebegrippen Wiskunde
22-9-1999

1. We bewijzen de waarheid van de bewering m.b.v. een waarheidstafel:

p	q	$q \Rightarrow p$	$p \wedge (q \Rightarrow p)$	$(p \wedge (q \Rightarrow p)) \Leftrightarrow p$
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

de equivalentie is dan een tautologie.

2. Zij $p \in (A \cap B) \times (C \cap D)$ willekeurig gegeven.

Dan $p = (x, y)$ met $x \in A \cap B$ en $y \in C \cap D$.

Dan $x \in A$ en $x \in B$ en $y \in C$ en $y \in D$

Daar $x \in A$ en $y \in C$ geldt: $(x, y) \in A \times C$

Daar $x \in B$ en $y \in D$ geldt: $(x, y) \in B \times D$.

Dan $(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D)$.

3. (i) Waar. Bewijs: Zij $n \in \mathbb{N}$ willekeurig geven.

Neem nu $m = n+1$ en $p = n^2 + n + 1$

Dan $m \in \mathbb{N}$ en $p \in \mathbb{N}$ en $m^2 - p = (n+1)^2 - (n^2 + n + 1)$
 $= n^2 + 2n + 1 - (n^2 + n + 1) = n$.

- (ii) Onwaar. Neem $n = m = 1$ dan geldt $\forall p \in \mathbb{N}$
 $1 \neq 1^2 + p$; dus er bestaat bij deze
 n en m geen $p \in \mathbb{N}$ met $n = m^2 + p$

4. (i) Waar. Laat A, B en C willek. gegeven zijn.

Dan:

$$A \cap (B \setminus C) = A \cap (B \cap C^c) = (A \cap B) \cap C^c = (A \cap B) \setminus C$$

(dit kan uitgewerkt ook via een dubbele inclusie)

4. (ii) Onwaar. Kies $A = B = \{1\}$ en $C = \emptyset$
 Dan $A \cap (B \cup C) = \{1\} \neq (A \cup B) \cap C = \emptyset$

(iii) Onwaar. Kies $A = (\leftarrow, 0]$ en $B = [0, \rightarrow)$
 Dan $A \Delta B = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ en dan $(A \Delta B)^c = \{0\}$.
 Echter $A^c = (0, \rightarrow)$ en $B^c = (\leftarrow, 0)$ en dan
 $A^c \Delta B^c = (\leftarrow, 0) \cup (0, \rightarrow) \neq \{0\} = (A \Delta B)^c$.

5. (i) basis: Voor $n=1$ geldt: $\sum_{k=1}^n k(3k-1) = \sum_{k=1}^1 k(3k-1) =$
 $= 1 \cdot 2 = 2 = 1^2(1+1) = n^2(n+1)$

Dus voor $n=1$ is de bewering juist.

(ii) inductie-stap: Stel dat voor een of andere $m \in \mathbb{N}$ de bewering juist is. Dan geldt voor $m+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} k(3k-1) &= \sum_{k=1}^m k(3k-1) + (m+1)(3m+2) \stackrel{!}{=} m^2(m+1) + \\ &+ (m+1)(3m+2) = (m+1)(m^2+3m+2) = (m+1)(m+1)(m+2) = \\ &= (m+1)^2((m+1)+1), \text{ dus voor } m+1 \text{ geldt de bewering} \\ &\text{dan ook.} \end{aligned}$$

6. (i) basis: voor $n=1$ geldt: $3^{3^n} - 2^{2^n} = 3^3 - 2^2 =$
 $= 27 - 4 = 23$ is deelbaar door 23.

inductie-stap: Stel dat voor een of andere $m \in \mathbb{N}$ de bewering juist is. Dan geldt voor $m+1$:

$$\begin{aligned} 3^{3^{m+3}} - 2^{2^{m+2}} &= 3^3 \cdot 3^{3^m} - 2^2 \cdot 2^{2^m} = 27 \cdot 3^{3^m} - 4 \cdot 2^{2^m} = \\ &= 23 \cdot 3^{3^m} + 4(3^{3^m} - 2^{2^m}) \text{ is deelbaar door} \end{aligned}$$

23 omdat de eerste term een 23-voud is (evident) en de tweede term ook (vanwege inductie-aanname)
 Dus voor $m+1$ geldt de bewering dan ook.