

Geef altijd voldoende uitleg bij je antwoorden! Het gebruik van een rekenmachine, een formuleblad of aantekeningen is niet toegestaan.

1. Ga na of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Als de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.

a) Laat (a_n) een rij zijn met $a_n \neq 0$ voor alle n .

(i) Als (a_n) convergeert naar 0, dan divergeert de rij $(1/a_n)$ naar ∞ .

(ii) Als (a_n) divergeert naar ∞ , dan convergeert de rij $(1/a_n)$ naar 0.

b) Laat $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ een reeks zijn met positieve termen.

(i) Als $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ convergeert, dan divergeert de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$.

(ii) Als $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergeert, dan convergeert de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$.

2. a) Geef de (ε, n) -definitie van een Cauchy-rij.

b) Toon aan: Als (a_n) een convergente rij is, dan is (a_n) een Cauchy-rij.

3. Toon aan, met behulp van de limietdefinitie, dat

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-1}{x^2+1} = \frac{1}{2}.$$

4. Laat f en g continue functies zijn in $c \in (a, b)$. Toon aan:

Als $f(c) > g(c)$ dan bestaat er een $\delta > 0$ zó dat voor alle x met $|x - c| < \delta$ geldt dat $f(x) > g(x)$.

Z.O.Z.

5. Laat f een continue functie zijn op $[a, b]$ en een differentieerbare functie op (a, b) . Laat verder $f(a) = f(b) = 0$. Toon aan:

Voor ieder reëel getal α bestaat er een $c \in (a, b)$ zó dat $f'(c) = \alpha f(c)$.

[Hint: Bekijk de functie $g(x) = e^{-\alpha x} f(x)$.]

6. De functie $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ is gedefinieerd door $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Toon aan, met behulp van boven- en ondersommen, dat f Riemann-integreerbaar is op $[1, 3]$.
[N.B. Je hoeft de waarde van de integraal niet te berekenen.]

7. Gegeven is dat de functie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continu is op $[0, 1]$. Toon aan dat er een $c \in [0, 1]$ bestaat zó dat

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3} f(c).$$

[Hint: Maak gebruik van het feit dat f zijn minimum en maximum aanneemt op $[0, 1]$.]

8. Toon aan dat de volgende limiet bestaat en bereken hem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^3 \frac{nx^2 + 1}{x^4 + nx^3} dx.$$

[Hint: toon eerst aan dat de functierij $\left(\frac{nx^2 + 1}{x^4 + nx^3} \right)$ uniform convergeert op $[1, 3]$.]

Normering:

1 : a) 3	2 : a) 1	3 : 5	4 : 5	5 : 4	6 : 4	7 : 4	8 : 5
b) 2	b) 3						
_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____
5	4	5	5	4	4	4	5

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{4} + 1$$