

Geef altijd voldoende uitleg bij je antwoorden! Het gebruik van een rekenmachine, een formuleblad of aantekeningen is niet toegestaan.

1. Ga na of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Als de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.

- a) Als de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ convergeert, dan convergeert de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ook.
- b) Als de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ convergeert, en de rij (b_k) is begrensd, dan convergeert de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ ook.

2. De rij (x_n) wordt gegeven door

$$x_1 = 1 \quad \text{en} \quad x_{n+1} = \frac{n}{n+1} x_n^2, \quad n \geq 1.$$

- a) Toon aan dat voor alle $n \geq 1$ geldt dat $0 < x_n \leq 1$.
- b) Toon aan dat (x_n) een monotone rij is.
- c) Bepaal $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. [Geef voldoende uitleg!]

3. Toon aan, met behulp van de limietdefinitie, dat

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{3 + 2x} = \frac{1}{2}.$$

4. De functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{als } x \text{ rationaal is} \\ 0 & \text{als } x \text{ irrationaal is} \end{cases}$$

- a) Toon aan dat f continu is in $x = 0$.
- b) Toon aan dat f discontinu is in alle $x \neq 0$.

Z.O.Z.

5. Laat f en g continue functies zijn op $[-1, 1]$ en differentieerbare functies op $(-1, 1)$. Gegeven is dat $f(-1) = g(1)$ en $f(1) = g(-1)$.

- a) Toon aan dat er een $c \in [-1, 1]$ bestaat zó dat $f(c) = g(c)$.
b) Toon aan dat er een $d \in (-1, 1)$ bestaat zó dat $f'(d) = -g'(d)$.

[Aanwijzing: Voer een hulpfunctie $h = f - g$ of $h = f + g$ in.]

6. Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Laat verder f een functie zijn op $[a, b]$ waarvoor geldt dat $|f(x)| \leq M$ voor alle $x \in [a, b]$ voor een zekere $M > 0$. Definieer $\mathcal{U}(f, D)$ en $\mathcal{L}(f, D)$ de bovensom resp. ondersom voor f op $[a, b]$ bij dissectie D .

- a) Laat zien dat

$$\mathcal{U}(f^2, D) - \mathcal{L}(f^2, D) \leq 2M (\mathcal{U}(f, D) - \mathcal{L}(f, D))$$

voor alle dissecties D van $[a, b]$.

[Aanwijzing: $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$].

- b) Toon aan dat als f Riemann-integreerbaar is op $[a, b]$ dat ook f^2 Riemann-integreerbaar is op $[a, b]$.

7. Toon aan dat de volgende limiet bestaat en bereken hem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 \frac{3 + nx^2}{nx^3 + x^4} dx.$$

Normering:

1 : a) 2	2 : a) 2.0	3 : 4	4 : a) 3	5 : a) 3	6 : a) 4	7 : 5
b) 2	b) 1.5		b) 3	b) 3	b) 2	
	c) 1.5					
_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____
4	5	4	6	6	6	5

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{4} + 1$$