

Tentamen analyse op variëteiten 16-12-2013

Opgave 1. Cirkel

Definieer voor iedere $r \in \mathbb{R}$ de verzameling $r + \mathbb{Z} = \{r + n | n \in \mathbb{Z}\}$. Hiermee kunnen we de cirkel heel mooi weergeven als de verzameling $\mathbb{S}^1 = \{r + \mathbb{Z} | r \in \mathbb{R}\}$. Voor iedere $r \in \mathbb{R}$ construeren we een afbeelding $h_r : U_r \rightarrow (r, r + 1)$ door $U_r = \mathbb{S}^1 - (\{r + \mathbb{Z}\})$ en $h_r(x + \mathbb{Z}) = x + n_x$ waarbij $n_x \in \mathbb{Z}$ het unieke gehele getal is zodanig dat $x + n_x \in (r, r + 1)$.

- We definiëren een topologie op $\mathbb{S}^1$ als volgt. Een verzameling $X \subset \mathbb{S}^1$ is open dan en slechts dan als $h_r(X \cap U_r)$ open is in $(r, r + 1)$. Zo wordt $\mathbb{S}^1$ een Hausdorff ruimte met een aftelbare basis voor de topologie, dat hoeft je niet te laten zien. Bewijs op basis hiervan dat met de atlas $\{(U_r, h_r) | r \in \mathbb{R}\}$ $\mathbb{S}^1$ een gladde variëteit wordt.
- Geef ook expliciet de transitie-afbeelding tussen twee kaarten h_r en h_s .
- Definieer voor alle $p \in \mathbb{S}^1$ de kromme $\gamma_p : (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rightarrow \mathbb{S}^1$ door $\gamma_p(t) = 2t + p$. Bewijs dat $[\gamma_p]$ een basis van $T_p \mathbb{S}^1$ geeft (geometrische raakruimte).
- Bewijs dat ω gedefinieerd door $\omega_p([\gamma_p]) = 1$ een gladde 1-vorm is.
- Druk ω beperkt tot U_r uit op de kaart (U_r, h_r) .
- Laat zien dat $\int_{\mathbb{S}^1} \omega > 0$.
- Als $F : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ gedefinieerd is door $F(x + \mathbb{Z}) = 2x + \mathbb{Z}$ bereken dan $F^* \omega$

Opgave 2. deRham

Stel ω, ζ zijn gladde n -vormen op een georiënteerde n -manifold M zonder rand en $\text{supp}(\omega)$ is compact.

- Laat zien dat als $[\omega] = [\zeta]$ in de deRham cohomologie van M , dat er dan een $\eta \in \Omega^{n-1}$ is met $\omega - \zeta = d\eta$.
- Stel $[\omega] = 0$ in de deRham cohomologie. Bewijs dat $\int_M \omega = 0$.
- Bewijs dat als $\int_M \omega \neq 0$ dat $[\omega]$ dan niet 0 is in de de Rham cohomologie $H^n M$.
- Waarom is de ω uit opgave 1 wel of juist niet gelijk aan 0 in $H^1 \mathbb{S}^1$?

Opgave 3. Dubbeloriëntatie

Als M een georiënteerde n -manifold met rand is, dan is $-M$ dezelfde manifold met de tegengestelde oriëntatie. Definieer $f_{\pm 1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ door $f_{\pm 1}(x^1, x^2, \dots, x^n) = (\pm x^1, x^2, \dots, x^n)$. We construeren een nieuwe manifold DM als de quotientruimte $(M \times \{1\} \cup -M \times \{-1\}) / \sim$ waarbij $(x, 1) \sim (x, -1)$ als $x \in \partial M$. De atlas van DM bestaat uit kaarten $(\bar{U}, \bar{h})$ waarbij (U, h) een kaart van M is $h : U \rightarrow \mathbb{R}_+^n = \{x^1 \leq 0\}$, $\bar{U} = U \times \{1, -1\}$ en $\bar{h}(p, \epsilon) = f_\epsilon \circ h(p)$.

- Als $M = [0, 1]$ wat is dan DM ? (geen bewijs nodig)
- Wat is ∂DM ? (geen bewijs nodig)
- Ga na dat $(\bar{U}, \bar{h})$ inderdaad een kaart van DM is.

- d. Bewijs dat DM automatisch ook georiënteerd is.
- e. Laat ook zien dat de afbeelding $S : DM \rightarrow DM$ gedefinieerd door $S(p, \epsilon) = (p, -\epsilon)$ de oriëntatie omdraait (orientation reversing is).

Opgave 4. Prisma

Stel M is een manifold van dimensie n zonder rand. Met $(-2, 2)$ geven we het open interval in $\mathbb{R}$ aan. Het product $P = M \times (-2, 2)$ is weer een topologische ruimte en op een natuurlijke manier een manifold. Bovendien zijn voor elke $s \in (-2, 2)$ de inclusie-afbeeldingen $i_s : M \rightarrow P$ gedefinieerd door $i_s(q) = (q, s)$ en is de projectie-afbeelding $\pi : P \rightarrow M$ gedefinieerd door $\pi(q, s) = q$.

- a. Als (U, h) een kaart van M is, laat dan zien dat $(U \times (-2, 2), h \times id)$ een kaart van P definieert. Hierbij is $h \times id$ gedefinieerd als $(h \times id)(q, s) = (h(q), s)$.

Op deze manier wordt P een manifold waarvan de atlas $\mathcal{A}$ uit de atlas van M verkregen wordt door met elke kaart (U, h) van M het bovenstaande te doen.

- b. Laat zien dat de inclusie-afbeelding i_s een gladde functie is voor iedere s .
- c. Geef de rand en de dimensie van P (zonder bewijs).
- d. Voor $q \in M$ definieert $\gamma_p(t) = (q, s + t)$ een gladde kromme op P . De equivalentieklasse van γ_p definieert dan een raakvector $[\gamma_p] \in T_p P$. Wat is het punt p ?
- e. Kies een kaart uit de atlas $\mathcal{A}$ en geef de coördinaat op $(-2, 2)$ aan met t . Laat dan zien dat de algebraïsche raakvector die correspondeert met $[\gamma_p]$ geschreven kan worden als $\frac{\partial}{\partial t}|_p$.
- f. Gegeven $\omega \in \Omega^k(P)$, en een kaart van P , schrijf $i_s^* \omega$ uit in termen van de coördinaten. De coördinaten op de kaart van M noemen we $x^1, \dots, x^n$. Hangt $(i_s \circ \pi)^* \omega$ van s af?
- g. Neem tot slot $M = \mathbb{S}^1$, $\omega \in \Omega^1(\mathbb{S}^1)$ als in opgave 1d en bereken $(\pi \circ i_s)^* \omega$.