Uitwerking tentamen Analyse BWI 2, 13 augustus 2002

① a)(i) Ja, want iedere ε-bol om $(0,0)$ bevat punten van D_f.

(ii) Een kandidaatlimiet is 0; immers $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0$.

Nu geldt: $0 \le |f(x,y) - 0| \le \frac{|x|y^2 + |y|x^2}{x^2+y^2} \le \frac{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$ als $(x,y)\to(0,0)$. Dus de limiet $\_\_\_\_\_\_\_\_$ bestaat en is 0.

b) g is continu in $t=0$, omdat beide componentfuncties continu zijn in $t=0$. Immers $\lim_{t\to 0} g_1(t) = \lim_{t\to 0} |t| = 0 = g_1(0)$ en $\lim_{t\to 0} g_2(t) = \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1 = g_2(0)$.

② a) Nee, want bv. $f\left(0\cdot\binom{x}{y}\right) = f\binom{0}{0} = \binom{-1}{3} \ne \binom{0}{0} = 0\cdot f\binom{x}{y}$ [dus $f(\lambda\cdot \underline{x}) \ne \lambda \cdot f(\underline{x})$]

b) $g_x(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t,0)-g(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t-0}{t} = 1$ $\qquad g_y(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{g(0,t)-g(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t(1+|t|)}{t} = 1$

c) $0 \le \frac{|g(x,y) - g(0,0) - x\cdot g_x(0,0) - y\, g_y(0,0)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|(x+y)\,|y||}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{|x+y|\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = |x+y| \to 0$ $\quad (x,y)\to(0,0)$,

dus g is differentieerbaar in $(0,0)$ met afgeleide $g'(0,0) = (1,1)$.

d) f is diffbaar op heel $\mathbb{R}^3$ met afgeleide $f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$. Verder $f(-1,1,-1) = (0,0)$; g is diffbaar in $(0,0) = f(-1,1,-1)$. Dus de samenstelling $(g\circ f)$ is diffbaar in $(-1,1,-1)$ met:

$$(g\circ f)'(-1,1,-1) = g'(f(-1,1,-1))\cdot f'(-1,1,-1) = (1,1)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix} = (2,1,1)$$

③ a) $\sin t = t + \cdots$ $(t\to 0)$ $\qquad e^t = 1 + t + t^2 + \cdots$ $(t \to 0)$ [... derde+hoger orde termen]

dus: $x\sin(x+y+z) = x^2 + xy + xz + \cdots$ $\quad (x,y,z)\to(0,0,0)$

en $y e^{x+z} = y + yx + yz + \cdots$ $\quad (x,y,z)\to(0,0,0)$.

Dus $f(x,y,z) = y + x^2 + 2xy + xz + yz + \cdots$ $\quad (x,y,z)\to(0,0,0)$,

dus $T_2(x,y,z) = y + x^2 + 2xy + xz + yz$.

b) $g'(0,0,0) = (0,-1,0)$ $\quad f'(0,0,0) = (0,1,0)$ (zie a)). Dus $(f+g)'(0,0,0) = (0,0,0)$

c) $H_{f+g} = H_f + H_g = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (in $(0,0,0)$)

d) H_{f+g} is positief definiet. $\left(2>0,\ \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4\end{vmatrix} > 0,\ \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix} > 0\right)$. Dus bevindt er zich een lokaal minimum in $(0,0,0)$.

Uitwerking tentamen Analyse BWI 2, 13 augustus 2002

④ a) V is gesloten (gegeven) en begrensd. Immers uit $x^2+2y^2+z^2=8$ volgt dat $|x| \le 2\sqrt{2}$, $|y| \le 2$, $|z| \le 2\sqrt{2}$. Dus V is compact.

1) Stel $g(x,y,z) = x^2+2y^2+z^2-8$. Verder is $f(x,y,z) = y(x+z)$.
- g en f zijn continu differentieerbare functies op $\mathbb{R}^3$ en hun domeinen zijn $\mathbb{R}^3$, dus hoeven we niet naar randpunten te kijken.
- $g'(x,y,z) = (2x, 4y, 2z)$ heeft altijd rang 1 op V. Immers rang 0 kan alleen voorkomen als $x=y=z=0$.
- Euler-Lagrange geeft het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\begin{aligned} (1)\quad & y - 2\lambda x = 0 \\ (2)\quad & x + z - 4\lambda y = 0 \\ (3)\quad & y - 2\lambda z = 0 \\ (4)\quad & x^2+2y^2+z^2 = 8 \end{aligned}$$

(1) + (3) $\Rightarrow$ $\underset{(5)}{\lambda = 0}$ of $\underset{(6)}{x = z}$

(5) + (1) $\Rightarrow$ $y = 0$ en dan leveren (2) en (4) $x+z=0 \wedge x^2+z^2=8$, dus $(x,z) = (2,-2)$ of $(-2,2)$.
Dus $S_1 = (2,0,-2)$, $S_2 = (-2,0,2)$.

(6) met (2) en (3) levert $\lambda^2 = 1/4$ of $y=0$ (deze hadden we al).
$\lambda = \frac{1}{2}$: $S_3 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ en $S_4 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$
$\lambda = -\frac{1}{2}$: $S_5 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$ en $S_6 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

f neemt een globaal maximum aan in S_3 en S_4 ter grootte $f(S_3) = f(S_4) = 4$
f neemt een globaal minimum aan in S_1 en S_2 ter grootte $f(S_1) = f(S_2) = -4$