

Faculteit der Exacte Wetenschappen	Tentamen Analyse BWI II
Divisie Wiskunde en Informatica	13:30 - 15:30 uur
Vrije Universiteit	14-08-2001

1. a) De functie $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$, met $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, is gegeven door

$$f(x, y) = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

- (i) Is $(0,0)$ een verdichtingspunt van $\mathcal{D}_f$? [Verklaar je antwoord.]
(ii) Bereken $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ of toon aan dat deze limiet niet bestaat.
- b) De functie $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is gedefinieerd door

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x - y + 1 \end{pmatrix}.$$

Is g een lineaire afbeelding? [Verklaar je antwoord.]

2. De functies $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ en $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ worden gegeven door

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sin(x) + 3z \\ y - \cos(z) \end{pmatrix}$$

en

$$g(x, y) = x + y + |xy|.$$

- a) Bepaal f_x, f_y en f_z in een willekeurig punt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
b) Bepaal, m.b.v. de definitie, de partiële afgeleiden $g_x(0,0)$ en $g_y(0,0)$.
c) Toon aan dat g differentieerbaar is in $(x, y) = (0,0)$ en bereken $g'(0,0)$.
d) Toon aan dat $(g \circ f)$ differentieerbaar is in $(x, y, z) = (\pi, 1, 0)$ en bepaal $(g \circ f)'(\pi, 1, 0)$.

Z.O.Z.

3. De functie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$f(x, y, z) = xe^{y+z} + y \cos(x+z).$$

a) Bereken het 2^e orde Taylorpolynoom van f bij $(0, 0, 0)$.

Van de functie $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven dat

$$g(x, y, z) = -x - y + yz + o(x^2 + y^2 + z^2), \quad (x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0).$$

b) Toon aan dat $(f + g)'(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$.

c) Bepaal de Hessematrix $H_{f+g}(0, 0, 0)$.

d) Ga na of de functie $f + g$ in $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ een lokaal extreem heeft.

4. De verzameling $V \subset \mathbb{R}^3$ is gegeven door

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 9 \text{ en } z - 2y = 0 \right\}.$$

a) Toon aan dat V een compacte verzameling is.

De functie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$f(x, y, z) = xyz.$$

b) Bepaal, m.b.v. de methode van Euler-Lagrange, de grootte en ligging van het globale maximum, dat f op V aanneemt.

[N.B.: Er wordt dus alleen gevraagd naar het *globale* maximum.]

Normering:

1 : a) 4	2 : a) 2	3 : a) 4	4 : a) 3
b) 2	b) 2	b) 2	b) 5
	c) 4	c) 2	
	d) 4	d) 2	
6	12	10	8

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\text{Totaal}}{4} + 1$$