

---

**Tentamen**  
**Analyse BA**

Afdeling Wiskunde  
Faculteit der Exacte Wetenschappen

Datum: Woensdag 25 maart, 15:15 - 17:15

Instructies: 6 opgaven;  *motiveer alle antwoorden.*

Geen rekenmachines of boeken.

**Normering:** 1 (10 ptn), 2 (10 ptn), 3 (15 ptn), 4 (10 ptn), 5 (15 ptn), 6 (30 ptn).

**Cijfer tentamen:** ptn/10 + 1.

---

1. Bereken de Laplace getransfomeerde van  $f(t) = e^{-4t}$  (berekening, dus geen tabel gebruiken!)

Hint: de Laplace getransfomeerde is gedefinieerd als  $(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ .

2. Los het volgende beginwaarde probleem op:

$$y' - xy = x, \quad y(0) = 1$$

3. Bepaal, gebruikmakende van Laplace transformatie, de oplossing van de differentiaalvergelijking:

$$y'' - 5y' + 6y = 6, \quad y(0) = 2, y'(0) = 5.$$

4. Vind de oplossing van:

$$y_{n+2} + 5y_{n+1} + 6y_n = 0, \quad y_0 = 1, y_1 = 1.$$

5. Beschouw de volgende machtreeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n} x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Bepaal de convergentie straal  $R$ .

(b) Onderzoek het gedrag voor  $x = \pm R$  (dwz. voor welke reële getallen op de rand van het convergentie gebied, indien van toepassing, convergeert de reeks?)

(c) Reken de som functie uit voor reële waarden  $x$  (Hint: gebruik dat de machtreeks oneindig vaak differentieerbaar is op het convergentiegebied).

6. Gegeven de functie  $f(x) = |\sin(\frac{x}{2})|$  op het interval  $[-\pi, \pi]$ .

(a) Laat zien dat de  $2\pi$ -periodieke uitbreiding van  $f$  een continue en stuksgewijs differentieerbare functie is op  $\mathbb{R}$ .

(b) Bewijs dat de Fourier reeks van  $f$  gegeven wordt door

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-4n^2} \cos(nx),$$

(Hint:  $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin(a) \cos(b)$ ).

(c) Geldt dat voor iedere waarde van  $x$  de Fourier reeks en  $f$  met elkaar overeenkomen?  
(Beredeneer je antwoord).

(d) Bereken mbv (b) de som van de volgende reeksen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}.$$

(e) Gebruik de gelijkheid van Parseval om de volgende som te berekenen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2},$$

**Succes**



|                                  |                                                 |
|----------------------------------|-------------------------------------------------|
| $f(t)$                           | $F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$         |
| 1                                | $\frac{1}{s}, \quad s > 0$                      |
| $t^n, n \in \mathbb{N}$          | $\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$               |
| $e^{at}$                         | $\frac{1}{s-a}, \quad s > a$                    |
| $\sin at$                        | $\frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$              |
| $\cos at$                        | $\frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$              |
| $\sinh at$                       | $\frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s >  a $            |
| $\cosh at$                       | $\frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s >  a $            |
| $H_a(t)$                         | $\frac{e^{-as}}{s}, \quad s > 0$                |
| $H_a(t)f(t-a)$                   | $e^{-as}F(s)$                                   |
| $e^{at}f(t)$                     | $F(s-a)$                                        |
| $f^{(n)}(t)$                     | $s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$ |
| $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ | $F(s)G(s)$                                      |

Tabel 2.1: Tabel van functies met hun Laplace getransformeerden.