

Dit tentamen bestaat uit 7 opgaven, verdeeld over 2 pagina's, plus een bijlage van 1 pagina.

1. Los het volgende beginwaardeprobleem op:

$$\begin{cases} y'(x) + \sin(x)y(x) = e^{\cos(x)}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

2. Bereken de algemene reële oplossing $y(x)$ van de volgende differentiaalvergelijking:

$$y''(x) - 2y'(x) + 3y(x) = e^{3x}.$$

3. Bepaal de algemene reële oplossing van de differentievergelijking:

$$y_k - 6y_{k-1} + 9y_{k-2} = (-1)^k k.$$

4. Beschouw het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 0, \\ y(0) = 1, y'(0) = 0. \end{cases}$$

- (a) Stel dat y een oplossing is waarvoor de Laplacegetransformeerde $\mathcal{L}(y)(s)$ bestaat. Laat zien dat geldt

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{s+1}{s^2 + s - 2}.$$

- (b) Los het beginwaardeprobleem op met behulp van de Laplacegetransformeerde.

5. Stel dat de machtreeks $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking

$$(x^2 + 1)y''(x) + y(x) = 0,$$

met $y(0) = y'(0) = 1$. Bereken a_0 , a_1 , a_2 en a_3 en laat zien dat voor gehele getallen $n \geq 2$ geldt

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = -(n^2 - n + 1)a_n.$$

6. Bepaal de convergentiestraal R van de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n} z^n.$$

7. We beschouwen de 2π -periodieke functie f die op het interval $-\pi < x \leq \pi$ gegeven wordt door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } |x| < \frac{1}{2}\pi \\ 1 & \text{als } \frac{1}{2}\pi \leq |x| \leq \pi. \end{cases}$$

- (a) Laat zien dat de Fourrierreeks van f gegeven wordt door

$$\frac{1}{2} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{-2(-1)^j}{\pi(2j+1)} \cos((2j+1)x).$$

- (b) Bereken

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1},$$

en geef aan welke stelling je daarbij gebruikt en waarom je die kunt gebruiken.

- (c) Bereken

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2},$$

en geef aan welke stelling je daarbij gebruikt en waarom je die kunt gebruiken.

Normering:

1: 4

2: 5

3: 5

4: a) 3

5: 4

6: 4

7: a) 3

b) 2

b) 3

c) 3

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{punten}}{4} + 1$$

$f(t)$	$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > a $
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > a $
$H_a(t)$	$\frac{e^{-as}}{s}, \quad s > 0$
$H_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$

Tabel 2.1: Tabel van functies met hun Laplace getransformeerden.