

Naam:

Uitwerkingen 9,10, 11 op dit blad!

Herentamen

Afdeling Wiskunde

Analyse BWI-1

Faculteit der Exacte Wetenschappen

Datum: Dinsdag 1 Juni, 18:30 - 20:30

Instructies: 11 opgaven — 8 multiple choice, 3 open vragen.

Geen rekenmachines of boeken.

Normering: 1 t/m 8 (8 ptn), 9 (16 ptn), 10 (10 ptn), 11 (10 ptn).

Cijfer tentamen: ptn/10.

Eindcijfer: [3 x tentamencijfer + huiswerkcijfer]/4.

1. Los op:

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}, \quad y(0) = 1.$$

a) $y = \frac{1}{2}(1 + x^2)e^{-x^2};$

b) $y = (1 + \frac{1}{2}x^2)e^{-x^2};$

c) $y = \frac{1}{2}e^{-x^2};$

d) $y = \frac{1}{2}(1 + x^2)e^{-x}.$

2. Bepaal de Laplace transformatie van de volgende functies:

$$x^n e^{\lambda x}, \quad 3x + 5.$$

a) $(s - \lambda)^{n+1}$ and $\frac{3}{s^2} + \frac{5}{s};$

b) $\frac{n!}{(s-\lambda)^{n+1}}$ and $3s^2 + 5s;$

c) $\frac{n!}{(s-\lambda)^n}$ and $3s^2 + 5s;$

d) $\frac{n!}{(s-\lambda)^{n+1}}$ and $\frac{3}{s^2} + \frac{5}{s}.$

3. Geef van de volgende reeksen aan of ze divergeren, convergeren, of absoluut convergeren:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\arctan(n)}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{3^n n!}, \quad \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1+i}{2} \right)^n.$$

a) Divergentie, absolute convergentie en absolute convergentie;

b) Divergentie, divergentie, convergentie

c) Divergentie, convergentie en convergentie;

d) Alle drie convergent.

4. Schrijf in poolcoördinaten:

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = i, \quad z_3 = 1 - i\sqrt{3}.$$

- a) $z_1 = e^{\frac{\pi}{4}i}, z_2 = e^{\frac{\pi}{2}i}, z_3 = 2e^{-\frac{\pi}{3}i};$
- b) $z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}i}, z_2 = e^{-\frac{\pi}{2}i}, z_3 = e^{-\frac{\pi}{3}i};$
- c) $z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}, z_2 = e^{\frac{\pi}{2}i}, z_3 = 2e^{-\frac{\pi}{3}i};$
- d) $z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}, z_2 = e^{\frac{\pi}{2}i}, z_3 = 2e^{\frac{\pi}{3}i}.$

5. Geef de oplossingen van:

$$(z - 2i)^3 = i.$$

- a) $z = e^{\frac{\pi}{6}i}, z = e^{\frac{5\pi}{6}i}, z = e^{\frac{3\pi}{2}i};$
- b) $z = 2i + e^{\frac{\pi}{6}i}, z = 2i + e^{\frac{5\pi}{6}i}, z = 2i + e^{\frac{3\pi}{2}i};$
- c) $z = 2i - e^{\frac{\pi}{6}i}, z = 2i - e^{\frac{5\pi}{6}i}, z = 2i - e^{\frac{3\pi}{2}i};$
- d) $z = 2ie^{\frac{\pi}{6}i}, z = 2ie^{\frac{5\pi}{6}i}, z = 2ie^{\frac{3\pi}{2}i}.$

6. Los op:

$$y_k + 2y_{k-1} + 2y_{k-2} = (-1)^k, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = 0.$$

- a) $y_k = (-1)^k + (\sqrt{2})^k \sin\left(\frac{3}{4}\pi k\right);$
- b) $y_k = (-1)^k + \sin\left(\frac{3}{4}\pi k\right);$
- c) $y_k = (-1)^k + (\sqrt{3})^k \sin\left(\frac{3}{4}\pi k\right);$
- d) $y_k = (-1)^k + (\sqrt{3})^k \sin(\pi k).$

7. Geef de convergentie straal, convergentie interval en som functie van de volgende machtreeks:

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} x^n.$$

- a) $R = 1, x \in (-1, 1)$ en $f(x) = -\ln(1 - x);$
- b) $R = \infty, x \in \mathbb{R}$ en $f(x) = -\ln(1 - x);$
- c) $R = 1, x \in [-1, 1)$ en $f(x) = -\ln(1 - x);$
- d) $R = 1, x \in [-1, 1)$ en $f(x) = \ln(1 - x).$

8. Bepaal de Fourier reeks van de 2π -periodieke functie f die op het interval $(-\pi, \pi]$ gegeven is door

$$f(x) = x^2.$$

- a) $\sum_{n \geq 1} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx);$
- b) $\sum_{n \geq 1} \frac{4}{n^2} \cos(nx);$
- c) $\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n \geq 1} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx);$
- d) $\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n \geq 1} \frac{4}{n^2} \cos(nx).$

9. Gegeven de functie $f(x) = |\sin(\frac{x}{2})|$ op het interval $[-\pi, \pi]$.

(a) Laat zien dat de 2π -periodieke uitbreiding van f een continue en stuksgewijs differentieerbare functie is op $\mathbb{R}$.

(b) Bereken de Fourier reeks van f (Hint: $\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2 \sin(a) \cos(b)$).

(c) Geldt dat voor iedere waarde van x de Fourier reeks en f met elkaar overeen komen? (Beredeneer je antwoord).

(d) Bereken mbv (b) de som van de volgende reeksen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}.$$

(e) Gebruik de gelijkheid van Parseval om de volgende som te berekenen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}.$$

10. Gegeven is de (complexe) machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 + 3i)^n}{n^3} z^n$$

a) Bereken de convergentiestraal R van deze machtreeks.

b) Laat zien dat de reeks convergeert voor alle z met $|z| = R$.

11. a) Bepaal de algemene reële oplossing van de homogene d.v.

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0.$$

b) Bepaal een particuliere oplossing van de inhomogene d.v.

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 4x + 2.$$

c) Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 4x + 2, \quad y(0) = 3, y'(0) = 1.$$

Succes

Naam: _____

Antwoordblad multiple choice.

1) _____

2) _____

3) _____

4) _____

5) _____

6) _____

7) _____

8) _____