

Herkansing Analyse BWI I 11 januari 2005

Opgave 1 Gegeven is de dv

$$4y'' + y = 0$$

- a) Bereken de algemene oplossing van deze homogene dv.
- b) Bepaal de oplossing van de dv

$$4y''(x) + y(x) = 0$$

onder de nevenvoorwaarden $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Geef de oplossing in termen van reëelwaardige functies.

Opgave 2 Bepaal de oplossing van

$$4y''(x) + y(x) = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$$

met behulp van de Laplacetransformatie.

Opgave 3 Gegeven is de D.V.

$$x_{n+1} + 3x_n + \frac{9}{2}x_{n-1} = 0.$$

- a) Bepaal de algemene oplossing.
- b) Bepaal de algemene oplossing van de D.V.

$$x_{n+1} + 3x_n + \frac{9}{2}x_{n-1} = 1.$$

Geef een reëelwaardige uitdrukking voor deze algemene oplossing.

(vervolg op achterzijde met Opgave 4)

Opgave 4 Bereken de convergentiestraal R van de machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

met $c_n = 0$ als n oneven is, en voor even n , $n = 2m$ geldt

$$c_{2m} = (-1)^m \frac{1}{2^{2m}(m+1)}$$

Opgave 5 Gegeven is de functie $f : (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ door $f(x) = 1$, voor $x \in (-\pi/2, \pi/2]$, en $f(x) = 0$ elders op $(-\pi, \pi]$. f wordt periodiek voortgezet buiten $(-\pi, \pi]$.

a) Laat zien dat de Fourierreeks $\sum c_k e^{ikx}$ van f gegeven wordt door

$$c_k = \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi}$$

(interpreteer dit voor $k = 0$ als de limiet voor $k \rightarrow 0$).

b) Bereken ook de Fourierreeks ten opzichte van de functies $\cos(kx)$, $\sin(kx)$.

c) Voor welke $x \in (-\pi, \pi]$ convergeert deze reeks naar $f(x)$? En zo ja, op grond van welke stelling?

d) Bereken

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2}$$

met behulp van de gelijkheid van Parseval.

Waardering:

1a = 10 pnt 1b = 10 pnt

2 = 12 pnt

3a = 10 pnt 3b = 12 pnt

4 = 10 pnt

5a = 8 pnt 5b = 5 pnt 5c = 5 pnt 5d = 8 pnt

Tentamencijfer : $1 + (\text{aantal pnt})/10$

Eindcijfer : Tentamencijfer + resultaat inleveren practicumopgaven

$f(t)$	$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > a $
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > a $
$H_a(t)$	$\frac{e^{-as}}{s}, \quad s > 0$
$H_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$

Tabel 1: Tabel van functies met hun Laplace getransformeerden.