

Faculteit der Exacte Wetenschappen	Tentamen Analyse BWI II
Divisie Wiskunde en Informatica	10:30 - 12:30 uur
Vrije Universiteit	26-03-2002

1. In dit vraagstuk is $V \subset \mathbb{R}^n$ een niet-lege verzameling en $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ (niet noodzakelijk tot V behorend). Bepaal of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Indien de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.

- a) Als $\mathbf{p}$ een inwendig punt is van V , dan is V een open verzameling.
- b) Als V een open verzameling is, dan is $\mathbf{p}$ een inwendig punt van V .
- c) Als $\mathbf{p}$ een inwendig punt is van V , dan is $\mathbf{p}$ een verdichtingspunt van V .
- d) Als $\mathbf{p}$ een verdichtingspunt is van V , dan is $\mathbf{p}$ een inwendig punt van V .

2. De functie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xy^2 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{als } (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ 0 & \text{als } (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

- a) Toon aan dat f continu is in $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.
- b) Bereken de partiële afgeleiden $f_x(0, 0, 0)$, $f_y(0, 0, 0)$ en $f_z(0, 0, 0)$.
- c) Ga na of f differentieerbaar is in $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

3. De functie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$f(x, y, z) = (x^2 + y)e^z - \sin y.$$

Bereken het 2^e orde Taylorpolynoom van f bij $(0, 0, 0)$.

Z.O.Z.

4. De functies $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ en $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zijn gegeven door

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 1-x \\ y^2 \\ xy \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad g(x, y, z) = \begin{pmatrix} |x| \\ x+z \end{pmatrix}.$$

- a) Toon aan dat $(g \circ f)$ differentieerbaar is in $(x, y) = (0, 0)$ en bepaal $(g \circ f)'(0, 0)$.
- b) We voeren in de functie $h := (f \circ g)$.
 - (i) Bereken $h(x, y, z)$.
 - (ii) Is h differentieerbaar in $(x, y, z) = (0, 0, 0)$? [Verklaar je antwoord!]

5. De functie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$f(x, y, z) = 2x^3 + 3xy^2 + y^3 + 6xz + z^2.$$

- a) Bepaal de stationaire punten van f .
- b) Bereken de Hessematrix $H_f(x, y, z)$.
- c) Ga na of f een extreme waarde aanneemt in de bij a) gevonden punten.

Normering:

1 : 5	2 : a) 3	3 : 5	4 : a) 4	5 : a) 5
	b) 2		b) 3	b) 2
	c) 4			c) 3
_____	_____	_____	_____	_____
5	9	5	7	10

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\text{Totaal}}{4} + 1$$