

Tentamen Analyse BWI I 30 oktober 2000

Opgave 1 Gegeven is de dv

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}$$

- a) Laat eerst zien (reken na onder de aanname dat alle oneigenlijke integralen bestaan) : als $\mathcal{L}(f(x)) = F(s)$ dan $\mathcal{L}(e^{ax}f(x)) = F(s-a)$.
- b) We bepalen een particuliere oplossing van de gegeven dv m.b.v. de Laplace transformatie. Bereken daartoe m.b.v. de Laplace transformatie de oplossing met nevenvoorwaarden

$$y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

- c) Bepaal nu de algemene oplossing van de gegeven dv.

Opgave 2 Gegeven zijn de functies $f(x) = 1 + x + x^2/4$, en $g(x) = 1/f(x)$. Bovendien is gegeven dat de functie $g(x)$ te schrijven is als machtreeks,

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

met $a_0 = 1$ en met onbekende $a_1, a_2, a_3, \dots$

- a) Pas de convolutiestelling voor machtreeksen toe om uit $f(x)g(x) = 1$ af te leiden dat

$$a_{n+1} + a_n + \frac{1}{4}a_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$1 + a_1 = 0$$

- b) Bepaal de algemene vorm van de oplossing van de recurrente betrekking

$$a_{n+1} + a_n + \frac{1}{4}a_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

en bepaal de oplossing onder de nevenvoorwaarden $a_0 = 1$ en $a_1 = -1$.

c) Bepaal de convergentiestraal R van de machtreeks van g .

d) Laat zien dat de machtreeks voor g niet in $x = -2$ convergeert.

Opgave 3 Gegeven is de primitieve (a eventueel een complex getal)

$$\int e^{ax} \cos(bx) dx = e^{ax} \frac{a \cos(bx) + b \sin(bx)}{a^2 + b^2}.$$

en de formule voor $\cos(z)$, $\cos(z) = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ voor alle complexe z .

a) Bereken de Fourierreeks $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ van de functie $f(x) = \cos(x/2)$ op $(-\pi, \pi]$.

b) Herschrijf de Fourierreeks tot een reële Fourierreeks.

c) Bereken de waarde van de som

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1}$$

d) Bereken de waarde van de som (Parseval relatie)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2}$$

1a : 9 pnt 1b : 10 pnt 1c : 10 pnt
Waardering: 2a : 10 pnt 2b : 10 pnt 2c : 10 pnt 2d : 9 pnt
3a : 10 pnt 3b : 10 pnt 3c : 10 pnt 3d : 10 pnt
Tentamencijfer : $1 + (\text{aantal pnt})/12$
Eindcijfer : Tentamencijfer + resultaat inleveren practicumopgaven

b) Bereken de convergentiestraal R van de complexe machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3 + 4i)^n z^n}{n^2}$$

(met $i^2 = -1$).

c) Converteert de machtreeks voor $|z| = R$?

Opgave 4 Gegeven is de functie

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } -\pi < x \leq 0 \\ 1 & \text{als } 0 < x < \pi \\ \frac{1}{2} & \text{als } x = \pi \end{cases}$$

a) Bereken de (complexe) Fourierreeks van f .

b) Voor welke $x \in (-\pi, \pi]$ convergeert deze reeks naar $f(x)$? Voor welke $x \in (-\pi, \pi]$ niet?

c) Gebruik de gelijkheid van Parseval om aan te tonen

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

1a : 10 pnt 1b : 10 pnt 1c : 8 pnt
2 : 10 pnt
Waardering: 3a : 10 pnt 3b : 7 pnt 3c : 7 pnt
4a : 12 pnt 4b : 8 pnt 4c : 8 pnt

Tentamencijfer : $1 + (\text{aantal pnt})/10$

Eindcijfer : Tentamencijfer + resultaat inleveren practicumopgaven