

1. De functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2 + y^2} & \text{als } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{als } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Bewijs dat f continu is op $\mathbb{R}^2$.
- b) Bereken $f_x(0, 0)$ en $f_y(0, 0)$.
- c) Ga na of f differentieerbaar is in het punt $(0, 0)$.

2. Gegeven is de functie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ door

$$f(x, y, z) = \cos(2x) \sin(y) + z^2.$$

- a) Bepaal de tweede-orde Taylorontwikkeling van f bij $(0, 0, 0)$.
- b) Onderzoek of er zich een extreem bevindt in de punten $(\frac{\pi}{4}, 0, 0)$ en $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0)$.

3. De verzameling $V \subset \mathbb{R}^3$ en de functie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ zijn gegeven door

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 8 \text{ én } z - 2y = 0 \right\}$$

en

$$f(x, y, z) = xz.$$

- a) Toon aan dat V een gesloten verzameling is.
- b) Toon aan dat f op V een grootste waarde aanneemt.
- c) Bepaal de waarde van dit maximum met de methode van Euler-Lagrange.

Z.O.Z.

4. De rijen (a_n) , (b_n) en (c_n) zijn gegeven door

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}, \quad b_n = \frac{(-1)^n}{n!} \quad \text{en} \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

a) Bewijs dat de reeks $\sum c_n$ convergeert.

b) Bepaal de som $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$.

5. Laat f de 2π -periodieke functie zijn die op het interval $(-\pi, \pi]$ gegeven is door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } -\pi < x < 0, \\ x & \text{als } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Laat de Fourierreeks van f gegeven zijn door

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

a) Bereken a_n en b_n .

b) Bepaal de som van de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

[Geef aan welke stelling je gebruikt en waarom je die kunt gebruiken.]

c) Bereken, m.b.v. de formule van Parseval, de som van de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4},$$

gebruik makend van het bekende feit dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Normering:

1 : a) 3	2 : a) 3	3 : a) 4	4 : a) 2	5 : a) 5
b) 2	b) 5	b) 2	b) 3	b) 3
c) 5		c) 5		c) 3
10	8	11	5	11

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\text{Totaal}}{5} + 1$$