Uitwerking tentamen Analyse BWI   6/6/2000

1 a) Buiten (0,0) triviaal. In (0,0): $|f(x,y)-f(0,0)| = \dfrac{|y^3|}{x^2+y^2} \le \dfrac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$.

Dus $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ en dus is f ook continu in (0,0).

b) $f_x(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{x} = 0$ $f_y(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{y-0}{y} = 1$

c) $\left| \dfrac{f(x,y) - f(0,0) - x f_x(0,0) - y f_y(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \dfrac{|yx^2|}{(x^2+y^2)^{3/2}} \not\to 0$.

Immers langs de lijn $x=y$: $\dfrac{|y^3|}{|2y^2|^{3/2}} \to \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$.   Dus f niet differentieerbaar in (0,0).

2 a) $\cos(2x) = 1 - \dfrac{(2x)^2}{2!} + \cdots = 1 - 2x^2 + \cdots$ $(x \to 0)$

$\sin(y) = y - \dfrac{y^3}{3!} + \cdots = y - \frac{1}{6}y^3 + \cdots$ $(y \to 0)$

dus: $f(x,y,z) = (1-2x^2+\cdots)(y-\frac{1}{6}y^3+\cdots) + z^2 = y + z^2 +$ hogere orde termen.

b) $f_x = -2\sin(2x)\sin(y)$
$f_y = \cos(2x)\cos(y)$
$f_z = 2z$

Zowel in $S_1 = (\frac{\pi}{4},0,0)$ als in $S_2 = (\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},0)$ geldt $f_x = f_y = f_z = 0$. Dus S_1 en S_2 zijn stationaire punten van f.

$$Hf = \begin{pmatrix} -4\cos(2x)\sin(y) & -2\sin(2x)\cos(y) & 0 \\ -2\sin(2x)\cos(y) & -\cos(2x)\sin(y) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ is de algemene Hesse matrix.

Dus $Hf(S_1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ met eigenwaarden $\lambda = \pm 2$; dus $Hf(S_1)$ indefiniet, dus geen extreem in S_1.

en $Hf(S_2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ met eigenwaarden $\lambda_i > 0$, dus $Hf(S_2)$ positief definiet, dus een minimum in S_2.

3 a) Stel $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ is $g(x,y,z) = x^2+y^2$. Dan $D_g = \mathbb{R}^3$ is gesloten en g is continu op $\mathbb{R}^3$.
Kies $B = \{8\}$; die is gesloten in $\mathbb{R}$. Dan dus $V_1 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 8\} = g^{-1}\{B\}$ gesloten.
Stel $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ is $h(x,y,z) = z-2y$. Dan $D_h = \mathbb{R}^3$ is gesloten en h is continu op $\mathbb{R}^3$.
Kies $C = \{0\}$; die is gesloten in $\mathbb{R}$. Dan dus $V_2 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid z-2y=0\} = h^{-1}\{C\}$ gesloten.
Nu is $V = V_1 \cap V_2$ en dus is ook V gesloten.

b) V is ook begrensd (dus compact). Immers $x^2+y^2=8$ impliceert $|x| \le 2\sqrt{2}$ en $|y| \le 2\sqrt{2}$ dus $|z| = 2|y| \le 4\sqrt{2}$. Verder geldt dat f continu is, dus neemt (een continue functie) f op (een compacte verz.) V zijn globale max. aan.

c) Stel $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ is $g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y^2-8 \\ z-2y \end{pmatrix}$; dan $g'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
Gebruik nu $x^2+y^2=8$:
Rang $g' < 2$ alleen als $x=y=0$, maar dat kan nooit voorkomen.
Verder zijn f en g C^2 functies en zijn er geen randextremen, dus de enige punten waar extremen kunnen optreden volgen uit:

$$\begin{cases} z - \lambda \cdot 2x = 0 & (1) \\ -\lambda \cdot 2y + 2\mu = 0 & (2) \\ x - \mu = 0 & (3) \\ x^2+y^2 = 8 & (4) \\ z - 2y = 0 & (5) \end{cases}$$

$(3) \Rightarrow x = \mu \overset{(2)}{=} \lambda y$
$(1) \Rightarrow z = 2\lambda x = 2\lambda^2 y \overset{(5)}{=} 2y$

dus $\underset{(6)}{y=0}$ of $\underset{(7)}{\lambda^2=1}$

$(6) \Rightarrow z=0$ en $x=0$ maar dat is in tegenspraak met (4).
(7): $\lambda = 1 \Rightarrow x=y$ en $z=2y$ dus (4): $S_1 = (2,2,4)$ of $S_2 = (-2,-2,-4)$
$\lambda = -1 \Rightarrow x=-y$ en $z=2y$ dus (4): $S_3 = (2,-2,-4)$ of $S_4 = (-2,2,4)$
$f(S_1) = f(S_2) = 8$ en $f(S_3) = f(S_4) = -8$. Dus 8 is het maximum.

4 a) $\sum a_n$ convergeert relatief (Leibniz) en $\sum b_n$ convergeert absoluut.
Dus (Mertens) convergeert $\sum c_n$.
b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = (\ln 2) \cdot (e^{-1}) = \dfrac{\ln 2}{e}$

5 a) $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \frac{\pi}{2}$. $(n\geq 1)$ $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)\,dx =$

$$\frac{1}{n\pi}\, x\sin(nx)\Big|_0^\pi - \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \sin(nx)\,dx = \frac{1}{n^2\pi}\cos(nx)\Big|_0^\pi = \frac{1}{n^2\pi}\left((-1)^n-1\right) = \begin{cases} 0 & n \text{ even} \\ \frac{-2}{n^2\pi} & n \text{ oneven} \end{cases}$$

$$(n\geq 1)\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin(nx)\,dx = -\frac{1}{n\pi}\, x\cos(nx)\Big|_0^\pi + \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \cos(nx)\,dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Dus de Fourierreeks van f luidt:

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx) - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

b) $\forall t$ is aan de Dirichlet voorwaarden voldaan, dwz $\lim_{x\downarrow t} f(x) := f(t+)$ en $\lim_{x\uparrow t} f(x) := f(t-)$ bestaan, evenals $\lim_{h\downarrow 0}\frac{f(t+h)-f(t+)}{h}$ en $\lim_{h\uparrow 0}\frac{f(t+h)-f(t-)}{h}$ en zijn eindig. Dan convergeert de Fourierreeks van f in t met als som $\frac{1}{2}\left(f(t+)+f(t-)\right)$. In het bijzonder geldt voor $t=0$:

$$0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}, \quad \text{dus} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

c) De formule van Parseval levert:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^2\,dx = \frac{1}{3}\pi^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \frac{\pi^2}{8} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4/\pi^2}{(2n-1)^4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Gegeven is dat $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Dus: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} = \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{6}\right)\cdot\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^4}{96}$