

1. De verzameling V is het (natuurlijke) definitiegebied van de functie $\tan \frac{1}{x}$.

- a) Beschrijf precies welke punten van $\mathbb{R}$ tot V behoren en welke niet.
- b) Laat zien dat 0 een verdichtingspunt van V is.
- c) Bewijs dat V niet gesloten is.
- d) Bewijs dat V open is.

2. a) De functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}.$$

Toon aan dat f differentieerbaar is in $(0, 0)$ met afgeleide $f'(0, 0) = (0, 0)$.

b) De functies $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ en $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zijn gegeven door

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} y \cos x \\ x e^y \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad h(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^4 + y^4} \\ y + 1 \end{pmatrix}.$$

Toon aan dat de functie $g \circ h$ differentieerbaar is in $(0, 0)$ en bepaal $(g \circ h)'(0, 0)$.

3. De verzameling $S \subset \mathbb{R}^3$ is gegeven door

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 2 \text{ en } y^2 - z^2 = 1 \right\}$$

en de functie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x, y, z) = y + z.$$

- a) Toon aan dat f op S een grootste en een kleinste waarde aanneemt.
- b) Bepaal de waarde van deze extremen met de methode van Euler-Lagrange.
[N.B.: Er wordt dus alleen gevraagd naar de *globale* extremen.]

Z.O.Z.

4. De rij (a_n) is gedefinieerd door

$$a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right).$$

a) Bepaal de convergentiepunten van de rij (a_n) .

b) Bepaal de convergentiestraal van de reeks

$$\sum_{n \geq 1} \left(\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)^n z^n.$$

5. De functie $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ is gedefinieerd door:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}, \\ 1 & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

a) Toon aan dat de Fourierreeks van f gelijk is aan

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos(2n+1)x.$$

b) Bereken:

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad (ii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Normering:

1 : a) 2
b) 2
c) 2
d) 3

9

2 : a) 5
b) 5

10

3 : a) 5
b) 6

11

4 : a) 3
b) 2

5

5 : a) 6
b) 4

10

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\text{Totaal}}{5} + 1$$