Uitwerking tentamen Analyse BWI 20/8/1999

① a) $x \neq 0$ en $\frac{1}{x} \neq (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$, dus $x \neq \frac{2}{\pi(2k+1)}$ $k \in \mathbb{Z}$.
De overige $x \in \mathbb{R}$ behoren wel tot V.

b) Beschouw het rijtje (x_n) met $x_n = \frac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$. Deze punten liggen alle in V en $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Dus 0 is een verdichtingspunt van V

c) 0 is een verdichtingspunt van V, maar $0 \notin V$. Dus is V niet gesloten.

d) Je kunt V schrijven als $(-\infty, -\frac{2}{\pi}) \cup (-\frac{2}{\pi}, -\frac{2}{3\pi}) \cup \cdots \cup (\frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi}) \cup (\frac{2}{\pi}, \infty)$.
Dus een vereniging van oneindig veel open verzamelingen. Dus is V zelf ook open.

② a) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^4}-0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ (vanwege symmetrie) Dus een kandidaatafgeleide is $(0,0)$.

Bekijk nu $\left| \frac{f(x,y) - f(0,0) - x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{\sqrt{x^4+y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Als deze uitdrukking naar 0 gaat voor $(x,y) \to (0,0)$ dan is f diffbaar in $(0,0)$. Welnu:

$$0 \le \frac{\sqrt{x^4+y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{\sqrt{x^4+2x^2y^2+y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow 0$$

Dus f diffbaar in $(0,0)$.

b) g is diffbaar op heel $\mathbb{R}^2$, want beide componentfuncties diffbaar op $\mathbb{R}^2$.
h is diffbaar in $(0,0)$, want beide comp. functies zijn daar diffbaar (zie a).
[en $h(0,0) = (0,1)$] Dus is $g \circ h$ ook diffbaar in $(0,0)$. Verder:

$$(g\circ h)'(0,0) = g'(h(0,0))\, h'(0,0) = g'(0,1)\cdot h'(0,0) =$$

$$= \left.\begin{pmatrix} -y\sin x & \cos x \\ e^y & xe^y \end{pmatrix}\right|_{(0,1)} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

③ a) → S is een compacte verzameling, want S is begrensd en gesloten:

I begrensd: $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=2 \Rightarrow |x|\leq\sqrt{2} \text{ en } |y|\leq\sqrt{2} \\ y^2-z^2=1 \Rightarrow z^2=y^2-1 \end{array}\right\}$ $|z|\leq 1$.

II gesloten: kies $f_1=x^2+y^2$. Dan $D_{f_1}=\mathbb{R}^3$ is gesloten in $\mathbb{R}^3$ en f continu op $\mathbb{R}^3$. $B=\{2\}$ is gesloten in $\mathbb{R}$ en $V_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=2\}=f_1^{-1}[2]$ is dus gesloten in $\mathbb{R}^3$. Op analoge wijze: $V_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y^2-z^2=1\}$ is gesloten in $\mathbb{R}^3$. Dus $S_1=V_1\cap V_2$ is gesloten in $\mathbb{R}^3$.

→ f is een continue functie op $\mathbb{R}^3$. Dus f neemt op S zijn globale extrema aan.

b) "Stappen 3+4" leveren niets op (geen randpunten; overal C^1)

"Stap 2": $\begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & 2y & -2z \end{pmatrix}$ heeft altijd rang 2, want ① $x=y=0$ kan niet ② $y=z=0$ kan niet en ③ $x=z=0$ kan niet

Dus geen punten opgeleverd.

"Stap 1":

$$\begin{cases} -\lambda\cdot 2x=0 & (1) \\ 1-\lambda\cdot 2y-\mu\cdot 2y=0 & (2) \\ 1+\mu\cdot 2z=0 & (3) \\ x^2+y^2=2 & (4) \\ y^2-z^2=1 & (5) \end{cases}$$

(1) geeft $\lambda=0$ of $x=0$. Echter $\lambda=0$ kan niet via (2) & (3): $y=-z$ en dan via (5) een tegenspraak. Dus $\boxed{x=0}$

Via (4) geeft dit $\boxed{y=\pm\sqrt{2}}$ en via (5) geeft dit $\boxed{z=\pm 1}$.

Dus $S_1=(0,\sqrt{2},1)$ $S_2=(0,\sqrt{2},-1)$ $S_3=(0,-\sqrt{2},1)$ en $S_4=(0,-\sqrt{2},-1)$

$\left\{\begin{array}{l}\text{GLOBAAL MAXIMUM:} \\ f(S_1)=1+\sqrt{2}\end{array}\right.$, $f(S_2)=-1+\sqrt{2}$, $f(S_3)=1-\sqrt{2}$ en $\left\{\begin{array}{l}\text{GLOBAAL MINIMUM:} \\ f(S_4)=-1-\sqrt{2}\end{array}\right.$

④ a) Bekijk I: 3voude II: 6voude ± 1 III: 6voude ± 2

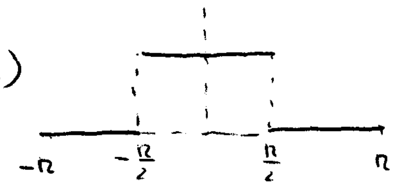
$$\left.\begin{array}{l} a_{3n}=\sin\left(\frac{3n\pi}{3}\right)=\sin n\pi=0 \\ a_{6n\pm1}=\sin\left(\frac{(6n\pm1)\pi}{3}\right)=\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)=\pm\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ a_{6n\pm2}=\sin\left(\frac{(6n\pm2)\pi}{3}\right)=\sin\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)=\pm\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right\}$$

Convergentiepunten zijn dus

0, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

b) $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right|^n}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

5 a)



De functie is <u>even</u>, dus we krijgen slechts cosinustermen in de (reele) Fourierreeks.

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 \cdot dx = 1$ $\qquad n \neq 0$: $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos nx \, dx =$

$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\sin nx \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

Als n even is dan $a_n = 0$ $(n \neq 0)$.
Als n oneven is $(n = 2m+1)$, dan: $a_{2m+1} = \frac{2}{\pi(2m+1)}\sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2}\right) = \frac{2(-1)^m}{\pi(2m+1)}$

dus $\mathcal{F}(f) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{1}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 2}{\pi(2m+1)} \cos(2m+1)x$.

b) (i) Omdat aan de Dirichlet voorwaarden is voldaan geldt in $x=0$:
[1½ punt]

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1} \quad \text{dus} \quad \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1} = \frac{\pi}{4}$$

(ii) Via de Formule van Parceval:
[2½ punt]

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1^2 \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{2} + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{4}{\pi^2}\frac{1}{(2m+1)^2}$$

dus: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.