

1. a) Laat V en W twee niet-lege open deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ zijn.
Toon aan dat hun doorsnede $V \cap W$ ook open is in $\mathbb{R}^n$.
b) De verzameling $U \subset \mathbb{R}^3$ wordt gegeven door

$$U = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy > 1 \text{ én } x^2 + z^2 < 4 \right\}.$$

Toon aan dat U open is in $\mathbb{R}^3$.

2. De functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{voor } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{voor } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Toon aan dat f continu is op $\mathbb{R}^2$.
b) Bereken de partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
c) Onderzoek of f differentieerbaar is in $(0, 0)$.

3. De functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x, y) = \cos(x + y) - e^{x-y} + x - y.$$

- a) Bepaal het tweede-orde Taylorpolynoom van f rond het punt $(0, 0)$.
b) Leid hieruit af de Hesse-matrix $H_f(0, 0)$.
c) Ga na of f een extreem heeft in $(0, 0)$.

4. De functie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x, y, z) = 2x^3 + 2y^2 + 4z^2 - 8x + 8xz + 4yz - z.$$

- a) Bepaal de stationaire punten van f .
b) Ga na in welke van de bij a) gevonden punten zich een extreem bevindt.

Z.O.Z.

5. De rij (a_n) , met $n = 0, 1, 2, \dots$, is gedefinieerd door $a_n = \frac{1}{n!}$.
Verder definiëren we de rij (b_n) als

$$(b_n) = (a_n) * (a_n),$$

de convolutierij van de rij (a_n) met zichzelf.

- a) Bereken b_n .

[Aanwijzing: de binomiaalsom $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ kan een rol spelen.]

- b) Bereken vervolgens m.b.v. de stelling van Mertens de som $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

6. a) Laat $F(s)$ de Laplace getransformeerde zijn van $f(t)$.
Toon aan dat dan $F(s-a)$ de Laplace getransformeerde is van $e^{at}f(t)$.
b) Toon aan dat de Laplace getransformeerde van $e^{2t} \sin t$ gelijk is aan

$$\frac{1}{s^2 - 4s + 5}, \quad s > 2.$$

- c) Bepaal m.b.v. Laplace transformatie de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 0, \\ y(0) = 0, y'(0) = 1. \end{cases}$$

Normering:

1 : a) 4	2 : a) 3	3 : a) 4	4 : a) 4	5 : a) 3	6 : a) 2
b) 4	b) 2	b) 2	b) 4	b) 2	b) 2
	c) 4	c) 2			c) 3
—	—	—	—	—	—
8	9	8	8	5	7

$$\text{Tentamencijfer} = \frac{\text{Totaal}}{5} + 1$$