UITWERKING TENTAMEN ANALYSE BWI 5-6-1998

① a) $\left|\frac{x^4-y^3}{x^2+y^2}-0\right| \le \frac{|x^4|+|y^3|}{x^2+y^2} \le \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^4+\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}{x^2+y^2} = x^2+y^2+\sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow 0$

[Formeler: Zij $\varepsilon>0$ gegeven. Kies $\delta = \min\{1, \frac{1}{2}\varepsilon\}$. Dan volgt dat voor $|\underline{x}-\underline{0}|<\delta$ geldt $|f(x,y)-f(0,0)| \le x^2+y^2+\sqrt{x^2+y^2} < \delta^2+\delta < \varepsilon$, dus f continu in $(0,0)$]

b) $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{x^2}-0}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{-\frac{y^3}{y^2}-0}{y} = \lim_{y\to 0} -1 = -1$

c) Een kandidaat afgeleide zou zijn $A = (0,-1)$. De functie f is diff.baar in $(0,0)$ dan en slechts dan als

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{f(x,y) - f(0,0) - A\cdot\binom{x}{y}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = 0$$

Beschouw deze limiet nu langs de lijn $y=x$. Dan volgt

$$\left| \frac{f(x,x) - f(0,0) - A\cdot\binom{x}{x}}{\sqrt{x^2+x^2}} \right| = \left| \frac{\frac{x^4-x^3}{x^2+x^2} - 0 - 0 + x}{\sqrt{x^2+x^2}} \right| = \left| \frac{x^2+x}{2\sqrt{2}\,|x|} \right| \not\longrightarrow 0,$$

dus is f niet differentieerbaar in $(0,0)$.

② a) Stel $V = V_1 \cap V_2$ met $V_1 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x+z^2=1\}$ en $V_2 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=2\}$.
Dan: voer in $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(\underline{x}) = x+z^2$. Dan $Df_1 = \mathbb{R}^3$ is gesloten in $\mathbb{R}^3$. f_1 is continu op $\mathbb{R}^3$.
$V_1 = f^{-1}[B]$, waarbij $B=\{1\}$ is gesloten in $\mathbb{R}$, dus V_1 gesloten. V_2 op analoge wijze.
Dus $V = V_1 \cap V_2$ is ook gesloten

b) f is continu. V is gesloten (zie a)) en ook begrensd. Immers $x^2+y^2=2$ impliceert $|x|<\sqrt{2}$ en $|y|<\sqrt{2}$. Daaruit volgt met $x+z^2=1$, dat $1-\sqrt{2}<z^2<1+\sqrt{2}$, dus $|z|<\sqrt{1+\sqrt{2}}$. Dus V is compact. Daaruit volgt dat f zijn globale minimum en maximum aanneemt op V.

c) Stel $g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+z^2-1 \\ x^2+y^2-2 \end{pmatrix}$. Dan $Df = Dg = \mathbb{R}^3$, dus geen randpunten en verder zijn f en g overal C^1, dus dit levert geen extra punten op die we nader moeten onderzoeken

$g' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2z \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}$. Dus rang $g < 2$ als $x=y=0$ of als $y=z=0$. Beide situaties kunnen zich niet voordoen, dus ook dit levert geen extra punten op die we nader moeten onderzoeken.
Bekijk dan $\nabla f - \lambda \nabla g = 0$, $g = 0$:

$$\begin{cases} 1 - \lambda - 2\mu x = 0 \\ 1 - 2\mu y = 0 \\ -2\lambda z = 0 \longrightarrow \boxed{z=0}\ (1) \text{ of } \boxed{\lambda = 0}\ (2) \\ x + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

(1): $z = 0 \downarrow$ $x = 1 \to y = \pm 1$

(2): $\lambda = 0 \uparrow$ $x = y \to x = y = 1 \to z = 0$ of $x = y = -1 \downarrow z = \pm\sqrt{2}$

Dus $S_1 = (1,1,0)$ met $f(S_1) = 2$ en $S_2 = (1,-1,0)$ met $f(S_2) = 0$
en $S_3 = (-1,-1,\sqrt{2})$ met $f(S_3) = -2$ en $S_4 = (-1,-1,-\sqrt{2})$ met $f(S_4) = -2$.

Omdat (zie b)) f zijn globale maximum en minimum moet aannemen in S_i, $i = 1..4$ geldt dat 2 het globale maximum is, aangenomen in S_1, en -2 het globale minimum, aangenomen in S_3 en S_4.

③ a) In $\mathbb{R}$: $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \cdots$ $\quad e^t = 1 + t + \cdots$ $\quad (t \to 0)$
Dus: $\cos(x-y) = 1 - \frac{1}{2}(x-y)^2 + \cdots$ $\quad e^{z^2} = 1 + z^2 + \cdots$ $\quad (x,y,z) \to (0,0,0)$
Dus: $T_2(x,y,z) = -\frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{3}{2}y^2 - z^2$.

b) $T_2(x,y,z) = f(\underline{0}) + \nabla f(\underline{0})^T \underline{x} + \frac{1}{2}\underline{x}^T Hf(\underline{0})\,\underline{x}$.

Dus $\nabla f(\underline{0}) = (0,0,0)$, dus $(0,0,0)$ is een stationair punt,
en $Hf(\underline{0}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. De eigenwaarden van $Hf(\underline{0})$ zijn -2, $-2+\sqrt{3}$, $-2-\sqrt{3}$, dus alle negatief en dus is $Hf(\underline{0})$ negatief definiet.
Dus bevindt er zich een maximum in $(0,0,0)$.

④ a) Beschouw de deelrijen (a_{3n}), (a_{3n+1}), (a_{3n+2}). Dan:
$a_{3n} = \frac{3n}{3n-1}\tan n\pi = 0$, $\quad a_{3n+1} = \frac{3n+1}{3n}\tan\frac{\pi}{3} \longrightarrow \sqrt{3}$

$a_{3n+2} = \frac{3n+2}{3n+1}\tan\frac{2\pi}{3} \longrightarrow -\sqrt{3}$. De convergentiepunten zijn dus $0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$