

1. De functies $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ en $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ worden gegeven door

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ xz \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad g(x, y, z) = \begin{pmatrix} |x| + |y| + |z| \\ x + y + z \end{pmatrix}.$$

- Toon aan dat f differentieerbaar is op $\mathbb{R}^3$ en bereken $f'(x, y, z)$ voor iedere $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- Toon aan dat g differentieerbaar is in $(1, -1, -1)$ en bereken $g'(1, -1, -1)$.
- Toon aan dat $g \circ f$ differentieerbaar is in $(1, 1, -1)$ en bereken $(g \circ f)'(1, 1, -1)$.

2. De functie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x, y, z) = \sin(y + z) + z \cos(x + y) - \frac{1}{2}x^2.$$

- Bepaal het Taylorpolynoom van f rond $(0, \frac{1}{2}\pi, 0)$ van de orde 2.
- Bepaal de Hesse-matrix van f in $(0, \frac{1}{2}\pi, 0)$.
- Ga na of f een extreem heeft in $(0, \frac{1}{2}\pi, 0)$.

3. De verzameling $V \subset \mathbb{R}^3$ wordt gegeven door

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| + |y| + |z| \leq 1 \right\}$$

- Toon aan dat V compact is.
- Toon aan dat V convex is.

4. De rijen (a_n) en (b_n) worden gedefinieerd door $a_n = \frac{2^n}{n!}$ en $b_n = \frac{(-1)^n}{n!}$.

- Bepaal de convolutierij $(c_n) = (a_n) * (b_n)$.

[Aanwijzing: $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$.]

- Bereken vervolgens m.b.v. de stelling van Mertens de som $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$.

Z.O.Z.

5. a) Toon aan dat de Laplacegetransformeerde van de functie xe^{2x} gelijk is aan

$$\frac{1}{(s-2)^2}, \quad s > 2.$$

- b) Bepaal m.b.v. Laplace transformatie de oplossing van het beginwaardeprobleem:

$$\begin{cases} y'(x) - 2y(x) = e^{2x}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Normering:

$$\begin{array}{l} 1 : a) 2 \\ b) 3 \\ c) 3 \\ \hline 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 : a) 4 \\ b) 2 \\ c) 2 \\ \hline 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3 : a) 3 \\ b) 4 \\ \hline 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4 : a) 3 \\ b) 3 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5 : a) 3 \\ b) 4 \\ \hline 7 \end{array}$$

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\text{Totaal}}{4} + 1$$