

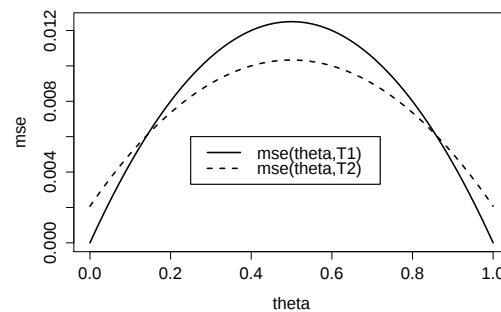
Gebruik van een (niet-grafische) rekenmachine is toegestaan. Na de correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau FEW. Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven en 2 bijlagen. De normering staat bij de vragen aangegeven. Cijfer = $\frac{\text{totaal}+4}{4}$.

Noteer duidelijk uw studierichting op uw uitwerking.

SUCCES!

Opgave 1 [6 punten]

- [2 punten] Leg uit waarvoor men een QQ-plot kan gebruiken voordat de Gauss-toets op een dataset wordt toegepast.
- [2 punten] Geef de definitie van een zuivere schatter T voor θ . Heeft een zuivere schatter altijd de voorkeur boven een onzuivere schatter?
- [2 punten] In onderstaande figuur staan de MSE functies $\theta \mapsto MSE(\theta; T)$ getekend voor twee schatters T_1 (doorgetrokken lijn) en T_2 (gestreepte lijn) voor de onbekende parameter $\theta \in (0, 1)$. Aan welke schatter geeft u de voorkeur? Motiveer uw antwoord.



Opgave 2 [11 punten]

Veronderstel dat $X_1, \dots, X_n$ een steekproef is uit de kansverdeling met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{3}{2} \theta^{-\frac{3}{2}} \sqrt{x} \mathbf{1}_{[0, \theta]}(x)$$

waar $\theta > 0$ een onbekende parameter is. Er geldt $E_\theta(X_1^2) = 3\theta^2/7$.

- [3 punten] Bereken de kwantielfunctie $F^{-1}(\alpha)$ van deze verdeling.
- [3 punten] Bepaal de maximum likelihood-schatter voor θ .
- [2 punten] Bepaal de momentenschatter voor θ .
- [3 punten] Bepaal de mean square error van de momentenschatter.

Opgave 3 [9 punten]

Veronderstel dat $X_1, \dots, X_n$ een steekproef is uit de discrete kansverdeling met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = (1 - \theta)^x \theta^{1-x} \quad x \in \{0, 1\}$$

waar $\theta \in (0, 1)$ een onbekende parameter is. Deze kansverdeling is gelijk aan de alternatieve verdeling met parameter $1 - \theta$.

- a. [3 punten] Bepaal de maximum likelihood-schatter voor θ .
- b. [3 punten] Bepaal de a posteriori dichtheid voor θ op basis van a priori dichtheid $\pi(\theta) = 12\theta^2(1 - \theta)\mathbf{1}_{(0,1)}(\theta)$. Welke bekende dichtheid is de a posteriori dichtheid? (U mag gebruik maken van de definitie van de Beta-verdeling in bijlage 1.)
- c. [3 punten] Bepaal de Bayes-schatter voor θ^2 (dus niet voor θ).

Opgave 4 [10 punten]

De inhoud van koffiecupsjes van fabrikant A is normaal verdeeld met onbekende verwachtingswaarde μ en standaarddeviatie $\sigma = 0.1$ gram. Volgens de verpakking behoort er in een cupje 5 gram koffie te zitten. Wij verdenken fabrikant A ervan dat hij te weinig koffie in zijn cupsjes doet, en nemen een steekproef van 25 koffiecupsjes. Noteer het gewicht van deze cupsjes als $X_1, \dots, X_{25}$. We meten $\bar{x} = 4.93$.

- a. [2 punten] Formuleer voor deze situatie een geschikte nul- en alternatieve hypothese. Motiveer uw keuze!
- b. [4 punten] Toets de nulhypothese uit (a) bij een onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha_0 = 0.05$ (zie Bijlage 2). Vermeld daarbij
 - i.) de toetsingsgrootte
 - ii.) de verdeling van de toetsingsgrootte onder de (rand van de) nulhypothese
 - iii.) het kritieke gebied
 - iv.) de conclusie van de toets.
- c. [2 punten] Bereken de overschrijdingskans van de toets in onderdeel (b).
- d. [2 punten] Bepaal het onderscheidend vermogen in $\mu = 4.95$.

Bijlage 1: Bèta-verdeling

Een stochastische grootte X die Bèta(α, β)-verdeeld is heeft de volgende dichtheid:

$$f_{\alpha, \beta}(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$$

met $\alpha, \beta > 0$, waar de Bèta-functie als volgt gedefinieerd is:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

met de eigenschap $B(\alpha + 1, \beta)/B(\alpha, \beta) = \alpha/(\alpha + \beta)$. De verwachtingswaarde en variantie zijn gelijk aan $EX = \alpha/(\alpha + \beta)$ en $\text{var}X = \alpha\beta/((\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1))$.

Bijlage 2: Tabel normale verdeling

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5	0.504	0.508	0.512	0.516	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.591	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.648	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.67	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.695	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.719	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.758	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.791	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.834	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.898	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.937	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.975	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.983	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.985	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.989
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.992	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.994	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.996	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.997	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.998	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.999	0.999
3.1	0.999	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabel 1: Verdelingsfunctie van de standaard normale verdeling op het interval $[0, 4]$. De waarde in de tabel is $\Phi(x)$ voor $x = a + b/100$ met a de waarde in de eerste kolom en b het getal in de eerste rij.