

- Gebruik van een (niet-grafische) rekenmachine is toegestaan.
- Cijfer = $\frac{\text{totaal}+4}{4}$
- Noteer duidelijk uw studierichting op uw uitwerking.
- Na de correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau FEW.

SUCCES!

Opgave 1 [6 punten]

Zij $X_1, \dots, X_n$ een steekproef uit de exponentiële verdeling met parameter $1/\theta$ met dichtheid $p_\theta(x) = (1/\theta)e^{-x/\theta}$ en $Y_1, \dots, Y_m$ een steekproef uit de exponentiële verdeling met parameter $2/\theta$. We nemen aan dat de twee steekproeven onafhankelijk zijn.

- [2 punten] Behoren de twee genoemde exponentiële verdelingen tot dezelfde lokatie-schaalfamilie? Beargumenteer uw antwoord met een korte berekening.
- [4 punten] Zij $T_c = c\bar{X} + 2(1-c)\bar{Y}$ met $c \in [0, 1]$ een schatter voor θ . Voor welke waarde van c is deze schatter optimaal?

Opgave 2 [12 punten]

Zij $X_1, \dots, X_n$ een steekproef uit de verdeling met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{2x}{\theta^2} 1_{0 \leq x \leq \theta}$$

waar $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

- [3 punten] Bepaal de momentenschatter voor θ en laat zien dat deze schatter zuiver is.
- [3 punten] Bepaal de maximum likelihood-schatter voor θ .
- [3 punten] Is de schatter uit onderdeel b zuiver? Zo nee, geef dan een zuivere schatter voor θ gebaseerd op de maximum likelihood-schatter.
- [3 punten] Bepaal een 1-dimensionale voldoende statistiek. Leg uit wat de stelling van Rao-Blackwell zegt over de varianties van zuivere schatters. Kun je op basis van deze stelling iets zeggen over de variantie van de schatters uit onderdeel (a) en (c)?

Opgave 3 [7 punten]

Op de verpakking van Lay's Patatje Joppie chips staat dat de inhoud 225 gram is. We nemen aan dat de inhoud normaal verdeeld is met onbekend gemiddelde μ en standaarddeviatie $\sigma = 2$ gram. Om te onderzoeken of de fabrikant wel genoeg chips in de verpakking stopt, wegen we de inhoud van 15 pakken chips. We meten een gemiddelde van 224.5 gram. We toetsen $H_0 : \mu \geq 225$ versus $H_1 : \mu < 225$ en nemen als onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha_0 = 0.05$.

- [2 punten] Bepaal een geschikte toetsingsgrootheid T en bijbehorend kritiek gebied K_T .
- [2 punten] Bereken de overschrijdingskans (p -waarde) en toets de nulhypothese.
- [2 punten] Bepaal het onderscheidend vermogen in $\mu = 224$.
- [1 punt] Is het onderscheidend vermogen in $\mu = 220$ hoger of lager dan het antwoord bij onderdeel (c)? Motiveer uw antwoord met een redenering, een berekening is niet nodig.

Opgave 4 [11 punten]

Zij $X_1, \dots, X_n$ een steekproef uit de $\Gamma(\alpha, \lambda)$ -verdeling met kansdichtheid

$$p_{\alpha, \lambda}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \lambda^\alpha e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x)$$

waar $\alpha > 0$ bekend is en $\lambda > 0$ een onbekende parameter is. De Gamma-functie is gedefinieerd als

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

met de eigenschap $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$. De verwachtingswaarde en variantie zijn gelijk aan $E_{\alpha, \lambda} X_i = \alpha/\lambda$ en $\text{var}_{\alpha, \lambda} X_i = \alpha/\lambda^2$.

- [3 punten] Laat zien dat de maximum likelihood-schatter voor λ gelijk is aan $\hat{\lambda} = \alpha/\bar{X}$. Bepaal ook de maximum likelihood-schatter voor $1/\lambda$.
- [3 punten] Bepaal de Fisher-informatie i_λ en de waargenomen informatie.
- [2 punten] Geef een benaderend betrouwbaarheidsinterval met onbetrouwbaarheid α_0 voor λ op basis van de maximum likelihood-schatter.
- [3 punten] Bepaal de Cramér-Rao ondergrens voor de variantie van zuivere schatters voor $1/\lambda$ en laat zien dat deze grens scherp is.

Bijlage 1: Tabel normale verdeling

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5	0.504	0.508	0.512	0.516	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.591	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.648	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.67	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.695	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.719	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.758	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.791	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.834	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.898	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.937	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.975	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.983	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.985	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.989
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.992	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.994	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.996	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.997	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.998	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.999	0.999
3.1	0.999	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Table 1: Verdelingsfunctie van de standaard normale verdeling op het interval $[0, 4]$. De waarde in de tabel is $\Phi(x)$ voor $x = a + b/100$ met a de waarde in de eerste kolom en b het getal in de eerste rij.