

- **Gebruik van een (niet-grafische) rekenmachine is toegestaan.**
- Geheel tentamen: **opgaven 1,2,3,4.** Cijfer = $\frac{\text{totaal}+4}{4}$
- Deeltentamen 2: **opgaven 3,4,5.** Cijfer = $\frac{\text{totaal}+3}{3}$
- **Noteer duidelijk uw studierichting op uw uitwerking.**
- Na de correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau FEW.

SUCCES!

Opgave 1 [6 punten] Alleen voor gehele tentamen

Zij $X_1, \dots, X_n$ een i.i.d. steekproef uit de homogene verdeling op het interval $[\theta, \theta + 1]$ met $\theta \in \mathbb{R}$ een onbekende parameter.

- [2 punten] Bepaal de momentenschatter voor θ .
- [2 punten] Bepaal de MSE van de schatter uit onderdeel (a).
- [2 punten] Schets de likelihoodfunctie. Wat kunt u concluderen over de maximum likelihoodschatter voor θ ?

Opgave 2 [8 punten] Alleen voor gehele tentamen

Zij $X_1, \dots, X_n$ een i.i.d. steekproef uit de $\mathcal{N}(0, 1/\theta)$ -verdeling met dichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\theta x^2}$$

waar $\theta > 0$ een onbekende parameter is. We nemen als a priori dichtheid voor θ de Gamma(α, λ) dichtheid met $\alpha, \lambda > 0$ bekend (zie Bijlage 1).

- [3 punten] Bepaal de maximum likelihood-schatter voor θ op basis van de steekproef.
- [2 punten] Bepaal de a posteriori dichtheid voor θ op basis van de steekproef $X_1, \dots, X_n$. Van welke verdeling is dit de dichtheid?
- [3 punten] Bepaal de Bayes-schatter voor θ^2 (let op: niet voor θ).

Opgave 3 [8 punten]

Afhaalpizzeria SmullenMaar heeft het bezorgsysteem verbeterd en beweert tegenwoordig een lagere gemiddelde bezorgingstijd (μ) te hebben dan de 30 minuten die de concurrent PizzaLekker gemiddeld heeft. We bestellen op wisselende dagen in totaal 15 keer een pizza. De 15 tijden tussen bestellen en bezorgen noteren we met $X_1, \dots, X_{15}$. We meten als steekproefgemiddelde $\bar{x} = 27.7$ minuten en als steekproefstandaarddeviatie $s_X = 2.4$ minuut. We willen met een statistische toets kijken of deze gegevens de bewering van SmullenMaar ondersteunen.

- a. [2 punten] Stel voor deze situatie een geschikt statistisch model op en een geschikte nulhypothese.
- b. [3 punten] Toets de nulhypothese uit onderdeel (a) bij een onbetrouwbaarheidsdrempel van 0.05. Vermeld de toetsingsgrootte, de verdeling van de toetsingsgrootte onder de (rand van de) nulhypothese, de overschrijdingskans of het kritieke gebied, en de conclusie van de toets. Vermeld duidelijk welke aannames u maakt.

Als gevolg van deze verbetering, is men bij PizzaLekker ook sneller gaan werken. We bestellen ook bij PizzaLekker 15 keer een pizza en meten een steekproefgemiddelde van $\bar{y} = 28.6$ minuten en een steekproefstandaarddeviatie van $s_Y = 2.6$ minuut.

- c. [3 punten] Toets de nulhypothese dat de verwachte bezorgtijden van de twee pizzeria's gelijk zijn bij onbetrouwbaarheidsniveau $\alpha_0 = 0.05$. Vermeld de toetsingsgrootte, de verdeling van de toetsingsgrootte onder de (rand van de) nulhypothese, de overschrijdingskans of het kritieke gebied, en de conclusie van de toets. Vermeld duidelijk welke aannames u maakt.

Opgave 4 [14 punten]

In het college Algemene Statistiek van 11 december 2013 hebben we een steekproef genomen om de fractie studenten die denkt te slagen voor een tentamen te onderzoeken. We nemen aan dat deze steekproef onder de 95 aanwezige studenten een representatieve steekproef is uit de populatie Algemene Statistiek studenten over de jaren heen, en noemen de onbekende populatiefractie die denkt te slagen voor een tentamen $p \in [0, 1]$. De stochast X_i geeft aan of de i^e persoon in de steekproef denkt te slagen voor het tentamen ($X_i = 1$) of niet ($X_i = 0$). We nemen aan dat de stochasten X_i onafhankelijk zijn en alternatief verdeeld met parameter p met kansmassafunctie

$$P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\}.$$

De maximum likelihood-schatter voor p is $\bar{X}$.

- a. [3 punten] Bepaal een voldoende en volledige statistiek.
- b. [2 punten] Bepaal een UMVZ schatter voor p . Geef duidelijk aan waarom de schatter UMVZ is. (Als u bij onderdeel (a) geen antwoord hebt gevonden, ga dan uit van de statistiek $\sum_{i=1}^n X_i$.)
- c. [3 punten] Bepaal de Fisher-informatie i_p en de plug-in schatter voor i_p .
- d. [3 punten] Laat zien dat de Cramér-Rao ondergrens voor een zuivere schatter voor p in dit geval scherp is.

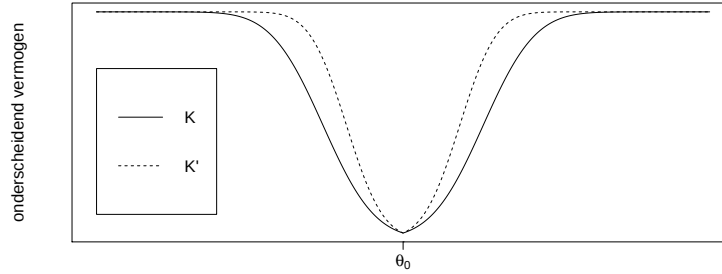
Van de 95 aanwezige studenten gaven 86 studenten aan dat ze dachten te slagen voor dit tentamen.

- e. [3 punten] Bepaal een numeriek benaderend betrouwbaarheidsinterval voor p met onbetrouwbaarheid 0.10 op basis van de maximum likelihood-schatter. (NB: *numeriek* wil zeggen: geef de getallen.)

Opgave 5 [5 punten] **Alleen voor deeltentamen 2**

Stel we hebben een waarneming X met een kansverdeling P_θ waar $\theta \in \mathbb{R}$ onbekend is. We beschouwen het toetsingsprobleem $H_0 : \theta = \theta_0$ tegen $H_1 : \theta \neq \theta_0$ voor $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Voor iedere $\theta_0 \in \mathbb{R}$ zijn twee toetsen gegeven, met kritiek gebied K_{θ_0} en K'_{θ_0} respectievelijk. Dat betekent dat er twee collecties toetsen zijn: $K = \{K_{\theta_0} : \theta_0 \in \mathbb{R}\}$ en $K' = \{K'_{\theta_0} : \theta_0 \in \mathbb{R}\}$. In figuur 1 staat het onderscheidend vermogen van K_{θ_0} en K'_{θ_0} getekend, voor willekeurige θ_0 . Alle toetsen hebben onbetrouwbaarheid $\alpha = 0.05$ ofwel $P_{\theta_0}(X \in K_{\theta_0}) = 0.05$ en $P_{\theta_0}(X \in K'_{\theta_0}) = 0.05$ voor alle $\theta_0 \in \mathbb{R}$.

- [2 punten] Aan welke collectie toetsen (K of K') geeft u de voorkeur en waarom?
- [2 punten] Stel dat voor alle θ_0 geldt $K_{\theta_0} \subseteq K'_{\theta_0}$. Met behulp van de relatie tussen toetsen en betrouwbaarheidsgebieden kunnen we betrouwbaarheidsgebieden G_X (op basis van collectie K) en G'_X (op basis van collectie K') met onbetrouwbaarheid α opstellen voor θ . Kan men op basis van deze gegevens concluderen dat $G_X \subseteq G'_X$ of $G'_X \subseteq G_X$? Of is daar niets over te concluderen? Motiveer uw antwoord.
- [1 punt] Stel dat $G = [L, R]$ een betrouwbaarheidsinterval is voor θ met onbetrouwbaarheid α . Geef een uitdrukking voor een betrouwbaarheidsinterval voor e^θ met onbetrouwbaarheid α en motiveer uw antwoord.



Figuur 1: Onderscheidend vermogen van de toetsen K_{θ_0} en K'_{θ_0} , voor willekeurige θ_0 .

Bijlage 1: Gamma-verdeling

Een stochastische grootte X die $\Gamma(\alpha, \lambda)$ -verdeeld is heeft de volgende dichtheid:

$$f_{\alpha, \lambda}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \lambda^\alpha e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x)$$

met $\alpha, \lambda > 0$, waar de Gamma-functie als volgt gedefinieerd is:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

met de eigenschap $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$. De verwachtingswaarde en variantie zijn gelijk aan $E_{\alpha, \lambda} X = \alpha / \lambda$ en $\text{var}_{\alpha, \lambda} X = \alpha / \lambda^2$.

Bijlage 2: Tabel normale verdeling

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5	0.504	0.508	0.512	0.516	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.591	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.648	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.67	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.695	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.719	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.758	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.791	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.834	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.898	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.937	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.975	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.983	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.985	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.989
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.992	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.994	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.996	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.997	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.998	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.999	0.999
3.1	0.999	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabel 1: Verdelingsfunctie van de standaard normale verdeling op het interval $[0, 4]$. De waarde in de tabel is $\Phi(x)$ voor $x = a + b/100$ met a de waarde in de eerste kolom en b het getal in de eerste rij.

Bijlage 3: Tabel t -verdeling

df	0.6	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.925	0.95	0.975	0.98	0.99	0.999
1	0.32	0.73	1	1.38	1.96	3.08	4.17	6.31	12.71	15.89	31.82	318.31
2	0.29	0.62	0.82	1.06	1.39	1.89	2.28	2.92	4.3	4.85	6.96	22.33
3	0.28	0.58	0.76	0.98	1.25	1.64	1.92	2.35	3.18	3.48	4.54	10.21
4	0.27	0.57	0.74	0.94	1.19	1.53	1.78	2.13	2.78	3	3.75	7.17
5	0.27	0.56	0.73	0.92	1.16	1.48	1.7	2.02	2.57	2.76	3.36	5.89
6	0.26	0.55	0.72	0.91	1.13	1.44	1.65	1.94	2.45	2.61	3.14	5.21
7	0.26	0.55	0.71	0.9	1.12	1.41	1.62	1.89	2.36	2.52	3	4.79
8	0.26	0.55	0.71	0.89	1.11	1.4	1.59	1.86	2.31	2.45	2.9	4.5
9	0.26	0.54	0.7	0.88	1.1	1.38	1.57	1.83	2.26	2.4	2.82	4.3
10	0.26	0.54	0.7	0.88	1.09	1.37	1.56	1.81	2.23	2.36	2.76	4.14
11	0.26	0.54	0.7	0.88	1.09	1.36	1.55	1.8	2.2	2.33	2.72	4.02
12	0.26	0.54	0.7	0.87	1.08	1.36	1.54	1.78	2.18	2.3	2.68	3.93
13	0.26	0.54	0.69	0.87	1.08	1.35	1.53	1.77	2.16	2.28	2.65	3.85
14	0.26	0.54	0.69	0.87	1.08	1.35	1.52	1.76	2.14	2.26	2.62	3.79
15	0.26	0.54	0.69	0.87	1.07	1.34	1.52	1.75	2.13	2.25	2.6	3.73
16	0.26	0.54	0.69	0.86	1.07	1.34	1.51	1.75	2.12	2.24	2.58	3.69
17	0.26	0.53	0.69	0.86	1.07	1.33	1.51	1.74	2.11	2.22	2.57	3.65
18	0.26	0.53	0.69	0.86	1.07	1.33	1.5	1.73	2.1	2.21	2.55	3.61
19	0.26	0.53	0.69	0.86	1.07	1.33	1.5	1.73	2.09	2.2	2.54	3.58
20	0.26	0.53	0.69	0.86	1.06	1.33	1.5	1.72	2.09	2.2	2.53	3.55
21	0.26	0.53	0.69	0.86	1.06	1.32	1.49	1.72	2.08	2.19	2.52	3.53
22	0.26	0.53	0.69	0.86	1.06	1.32	1.49	1.72	2.07	2.18	2.51	3.5
23	0.26	0.53	0.69	0.86	1.06	1.32	1.49	1.71	2.07	2.18	2.5	3.48
24	0.26	0.53	0.68	0.86	1.06	1.32	1.49	1.71	2.06	2.17	2.49	3.47
25	0.26	0.53	0.68	0.86	1.06	1.32	1.49	1.71	2.06	2.17	2.49	3.45
26	0.26	0.53	0.68	0.86	1.06	1.31	1.48	1.71	2.06	2.16	2.48	3.43
27	0.26	0.53	0.68	0.86	1.06	1.31	1.48	1.7	2.05	2.16	2.47	3.42
28	0.26	0.53	0.68	0.85	1.06	1.31	1.48	1.7	2.05	2.15	2.47	3.41
29	0.26	0.53	0.68	0.85	1.06	1.31	1.48	1.7	2.05	2.15	2.46	3.4
30	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.31	1.48	1.7	2.04	2.15	2.46	3.39
31	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.31	1.48	1.7	2.04	2.14	2.45	3.37
32	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.31	1.47	1.69	2.04	2.14	2.45	3.37
33	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.31	1.47	1.69	2.03	2.14	2.44	3.36
34	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.31	1.47	1.69	2.03	2.14	2.44	3.35
35	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.31	1.47	1.69	2.03	2.13	2.44	3.34
36	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.31	1.47	1.69	2.03	2.13	2.43	3.33
37	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.3	1.47	1.69	2.03	2.13	2.43	3.33
38	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.3	1.47	1.69	2.02	2.13	2.43	3.32
39	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.3	1.47	1.68	2.02	2.12	2.43	3.31
40	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.3	1.47	1.68	2.02	2.12	2.42	3.31

Tabel 2: (Beneden-) Kwantielen van de t -verdelingen met 1 tot 40 vrijheidsgraden.