

Het gebruik van een rekenmachine is NIET toegestaan. Succes!

1. Laat $X_1, \dots, X_n$ een steekproef zijn uit de verdeling met kansdichtheid

$$f_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x \in [0, 1]$$

met $\alpha > 0$ onbekend. Bepaal de momentenschatting voor α .

2. Veronderstel dat een experiment op twee manieren uitgevoerd kan worden. Een waarneming gevonden met methode 1 is Poisson verdeeld met parameter θ . Een waarneming gevonden met methode 2 is tevens Poisson verdeeld maar nu met parameter 2θ . Veronderstel dat men van plan is het experiment n maal uit te voeren met methode 1 en m maal met methode 2. Dit levert dan twee onafhankelijke steekproeven op: $X_1, \dots, X_n$ en $Y_1, \dots, Y_m$, waarbij $X_1, \dots, X_n$ Poisson(θ), en $Y_1, \dots, Y_m$ Poisson(2θ) verdeeld zijn.

- (a) Laat zien dat de maximum likelihood schatter van θ gelijk is aan $(\sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^m Y_i)/(n + 2m)$.
- (b) Bepaal de mean squared error van de maximum likelihood schatter voor θ . Veronderstel dat je n en m zelf kiezen mag onder de voorwaarde dat $n + m = 100$. Hoe zou je n en m kiezen opdat de mean squared error minimaal is? Geef toelichting.

Veronderstel dat $n = m$. We willen de nulhypothese $H_0 : \theta = \theta_0$ toetsen tegen het alternatief $H_1 : \theta \neq \theta_0$. Definieer $W = \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^n Y_i = \sum_{i=1}^n (X_i + Y_i)$.

- (c) Welke verdeling heeft W bij benadering voor een grote waarde van n ? Geef toelichting.
- (d) Bepaal een kritiek gebied K_W voor de toetsingsgrootte W om H_0 te toetsen tegen H_1 , waarvan de onbetrouwbaarheid bij benadering gelijk aan α_0 is.
- Als je niet weet welke verdeling W bij benadering heeft, veronderstel dan dat W bij benadering normaal verdeeld is met verwachting $2n\theta$ en variantie $2n\theta$ (dit hoeft niet het goede antwoord te zijn).

3. Zij $X_1, \dots, X_n$ een steekproef uit de verdeling met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \theta x^{-2}, \quad \text{voor } x \geq \theta$$

en 0 voor $x < \theta$, met $\theta > 0$ onbekend.

- (a) Bepaal de maximum likelihood-schatter voor θ .
 - (b) Horen de verdelingen met $\theta = 1$ en $\theta = 2$ tot dezelfde locatie-schaal familie? Leg uit met een korte berekening.
4. Laat $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met kansdichtheid p_θ gegeven door

$$p_\theta(x) = \frac{1}{2}\theta e^{-\theta|x|}, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

waarbij $\theta > 0$ een onbekende parameter is. We gaan deze parameter Bayesiaans schatten en gebruiken daarvoor als a-priori verdeling een gamma verdeling met vast gekozen parameters $r, \lambda > 0$. Deze heeft dichtheid

$$\pi(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

met Γ de gamma functie (de precieze vorm van Γ doet er niet toe), verwachting r/λ en variatie r/λ^2 .

- (a) Veronderstel dat we zeer weinig a priori kennis hebben over θ . Leg uit hoe je in dit geval de parameters λ en r zou kiezen.
- (b) Bepaal de a-posteriori verdeling. Welke bekende verdeling is dit? Bepaal bovendien de Bayes schatter voor θ op basis van de steekproef.

Normering:

1: 3 2(a): 4 3(a): 3 4(a): 2
 2(b): 3 3(b): 3 4(b): 4
 2(c): 1
 2(d): 4

Eindcijfer: (totaal + 3)/3