

U krijgt de beschikking over een tabellenboekje. Het gebruik van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan. Succes!

1. Veronderstel dat $X_1, \dots, X_n$ een steekproef is uit de verdeling met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{2}{\theta} e^{-\frac{2x}{\theta}}, \quad \text{voor } x > 0$$

en voor $\theta > 0$ onbekend.

- (a) Laat zien dat de maximum likelihood schatter voor θ gelijk is aan $\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

- (b) Bepaal een voldoende en volledige statistiek.

- (c) Bepaal een UMVZ-schatter voor θ .

Hint: herken je de dichtheid van een bekende verdeling in p_θ ?

- (d) Bepaal de Cramer-Rao ondergrens voor de variantie van een zuivere schatter voor θ . Is deze ondergrens scherp?

2. Minder vlees eten kan enorm bijdragen aan de vermindering van de CO₂-uitstoot. Onderzoekers willen weten hoeveel procent van de vleesetende Nederlanders bereid is om minder vlees te eten voor het klimaat. Daartoe wordt n vleesetende mensen gevraagd of ze hier toe bereid zijn. Definieer $X_1, \dots, X_n$ als het antwoord van de n mensen, waarbij X_i gelijk is aan 1 als de i -de persoon bereid is minder vlees te eten; anders is X_i gelijk aan 0. De waarnemingen $X_1, \dots, X_n$ zijn onderling onafhankelijk en alternatief verdeeld; dat betekent dat $P_p(X_i = x_i) = p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$ voor $x_i \in \{0, 1\}$. Definieer $X = \sum_{i=1}^n X_i$ als het aantal mensen van de n ondervraagden dat bereid is minder vlees te eten. De maximum likelihood schatter voor p is gelijk aan $\sum_{i=1}^n X_i / n = X/n$.

- (a) Bereken de waargenomen Fisher informatie voor p gebaseerd op $X_1, \dots, X_n$.

- (b) Construeer een benaderend $(1 - \alpha)100\%$ betrouwbaarheidsinterval voor p .

- (c) Men wil onderzoeken of meer dan 50% van vleesetend Nederland bereid is minder vlees te eten voor het klimaat. Formuleer een nul- en een alternatieve hypothese voor dit probleem. Veronderstel dat $n = 1000$ en dat van de 1000 mensen in de steekproef er 536 mensen minder vlees willen eten voor het klimaat. Geef een benaderende overschrijdingskans. Moet de nulhypothese worden verworpen bij een onbetrouwbaarheidsdrempel van $\alpha_0 = 0.05$? Geef je conclusie.

3. Zij $X_1, \dots, X_n$ een steekproef uit de discrete kansverdeling gegeven door

$$P_\theta(X = x) = \frac{1}{\theta} 1_{x \in \{1, 2, \dots, \theta\}},$$

waarbij $1_{x \in \{1, 2, \dots, \theta\}}$ gelijk is aan 1 als $x \in \{1, 2, \dots, \theta\}$ en anders gelijk aan 0 is. De parameter $\theta \in \mathbb{N}$ is onbekend.

- (a) Bepaal de momentenschatting van θ . U mag gebruik maken van het feit dat $\sum_{i=1}^k i = \frac{1}{2}k(k+1)$.
- (b) Bepaal de maximum likelihood-schatting voor θ .
- (c) We gaan θ Bayesiaans schatten. Als a-priori verdeling voor θ nemen we de discrete kansverdeling gegeven door

$$P_a(\bar{\Theta} = \theta) = \frac{1}{a} 1_{\theta \in \{1, 2, \dots, a\}},$$

voor een gegeven $a \in \mathbb{N}$. Geef een uitdrukking voor de a-posteriori dichtheid voor θ (dit is niet een dichtheid van een bekende verdeling) en bereken vervolgens de Bayes schatting voor θ als $x_{(n)} = \max\{x_1, \dots, x_n\} = 6, a = 7, n = 10$.

Normering:

1(a):	3	2(a):	3	3(a):	2
1(b):	2	2(b):	3	3(b):	2
1(c):	2	2(c):	4	3(c):	3
1(d):	3				

Eindcijfer: (totaal + 3)/3