

U krijgt de beschikking over een tabellenboekje. Het gebruik van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan. Succes!

1. Zij $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke en identiek verdeelde stochastische grootheden met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \theta x e^{-x^2 \theta / 2} \quad x \geq 0$$

met $\theta > 0$ een onbekende parameter.

- (a) Bereken de maximum likelihood schatter $\hat{\theta}$ voor θ op basis van de waarnemingen $X_1, \dots, X_n$.
 - (b) Bereken de Fisher informatie i_θ voor θ voor 1 waarneming.
 - (c) Welke verdeling heeft de maximum likelihood schatter $\hat{\theta}$ bij benadering, voor n groot? De variantie van deze verdeling is gelijk aan de Cramer-Rao ondergrens. Wat is de betekenis van de Cramer-Rao ondergrens?
2. Veronderstel dat $X_1, \dots, X_n$ een steekproef is uit de normale verdeling met onbekende verwachting μ en bekende variantie σ^2 .
- (a) Construeer een exact $(1 - \alpha)100\%$ betrouwbaarheidsinterval voor μ op basis van de pivot $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma$. Kies het interval symmetrisch rond $\bar{X}$. Geef duidelijk aan hoe je het interval construeert.
 - (b) Construeer een exact $(1 - \alpha)100\%$ betrouwbaarheidsinterval voor μ op basis van de likelihood ratio statistiek. Geef duidelijk aan hoe je het interval construeert.
 - (c) Laat zien dat beide intervallen exact aan elkaar gelijk zijn.

3. Epidemiologen vermoeden dat als gevolg van de Mexicaanse griep het verwachte aantal griepdoden tijdens de winter meer dan twee maal zo hoog zal zijn als tijdens een normale winter. In Nederland stierven in de voorgaande winters gemiddeld jaarlijks 3400 mensen door griep. Noteer het aantal griepdoden tijdens komende winter met X . We veronderstellen dat X poisson verdeeld is met onbekende parameter θ . De verwachting en variantie van X zijn beide gelijk aan θ .

(a) Stel een nul en een alternatieve hypothese op om te toetsen of het verwachte aantal griepdoden komende winter meer dan 6800 is. Als toetsingsgrootte nemen we X . Construeer een kritiek gebied. U mag gebruik maken van het feit dat als θ de ware parameterwaarde is, $(X - E_\theta X)/\sqrt{\text{Var}_\theta X}$ bij benadering standaard normaal verdeeld is voor θ groot (wat het geval is in deze opgave). Neem als onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha_0 = 0.05$.

(b) Veronderstel dat komend voorjaar 7000 griepdoden zijn geteld. Moet de nulhypothese worden verworpen? Wat is dan uw conclusie?

4. Veronderstel dat $X_1, \dots, X_n$ een steekproef is uit de verdeling met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \theta x^{\theta-1} \quad x \in [0, 1]$$

voor $\theta > 0$ onbekend.

(a) Bepaal de maximum likelihood schatter voor θ en laat zien dat de maximum likelihood schatter voor $1/\theta$ gelijk is aan $-n^{-1} \sum_{i=1}^n \log X_i$.

(b) Bepaal de momenten schatter voor $1/\theta$.

(c) Bepaal een voldoende en volledige statistiek.

(d) Laat zien dat de maximum likelihood schatter voor $1/\theta$ een UMVZ-schatter voor $1/\theta$ is.

U mag hierbij gebruiken dat $E_\theta \log X_1 = -1/\theta$.

Normering:

1(a): 3 2(a): 3 3(a): 5 4(a): 4

1(b): 3 2(b): 4 3(b): 1 4(b): 3

1(c): 3 2(c): 2 4(c): 3

4(d): 2

Eindcijfer: (totaal + 4)/4