

U krijgt de beschikking over een tabellenboekje. Het gebruik van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan. Succes!

1. De stochastische grootheden $X_1, \dots, X_n$ zijn onafhankelijk en identiek verdeeld met de normale verdeling met verwachting 1 en onbekende variantie $1/\theta$. De bijbehorende dichtheid wordt gegeven door:

$$p_\theta(x) = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\theta(x-1)^2}.$$

- (a) Bepaal de meest aannemelijke schatter voor θ .

We gaan θ nu schatten met de Bayes schatter. We kiezen als a priori dichtheid voor θ de gamma dichtheid met parameters α en λ :

$$\pi(\theta) = \frac{\theta^{\alpha-1} \lambda^\alpha e^{-\lambda\theta}}{\Gamma(\alpha)} \quad \text{voor } \theta > 0,$$

met α en λ vast gekozen parameters en Γ de Gamma functie. De verwachting van een stochastische grootheid met bovenstaande dichtheid is gelijk aan α/λ .

- (b) Bepaal de a posteriori verdeling voor θ relatief ten opzichte van π . Geef een uitdrukking voor de parameters van de a posteriori verdeling in termen van α , λ en $X_1, \dots, X_n$.
- (c) Bepaal de Bayes schatter voor θ .
2. Laat $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke en gelijkverdeelde stochastische variabelen zijn met dichtheid

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-\theta)}{\theta^2} & \text{voor } \theta \leq x \leq 2\theta, \\ 0 & \text{voor } x < \theta \text{ of } x > 2\theta, \end{cases}$$

waarbij $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

- (a) Bepaal de momentenschatting voor θ .
- (b) Bepaal de MSE van de momentenschatting. Je mag gebruik maken van het feit dat $E_{\theta} X_1^2 = \frac{17}{6} \theta^2$.
- (c) Bepaal de meest aannemelijke schatting voor θ .
3. Als gevolg van het smelten van de poolkappen door de opwarming van de aarde, neemt het aantal ijsberen in het noordpoolgebied (N) af. Enkele biologen willen weten hoeveel ijsberen er nog in het noordpoolgebied leven. Ze gaan als volgt te werk. Ze vangen 2000 verschillende ijsberen, merken ze en zetten ze verspreid in het noordpoolgebied terug. Twee maanden later vangen ze 1000 ijsberen (dit keer worden de ijsberen direct na het vangen teruggezet; trekken met terugleggen) en tellen het aantal gemerkte ijsberen dat ze gevangen hebben. Zij X het aantal gevangen gemerkte ijsberen. Dan heeft X een binomiale verdeling met parameters 1000 en p waarbij p onbekend is en gelijk is aan de fractie gemerkte ijsberen in het noordpoolgebied. De biologen willen weten of het aantal ijsberen (N) gezakt is onder de 20.000.
- (a) Formuleer een nul- en een alternatieve hypothese in termen van het totaal aantal ijsberen in het noordpoolgebied (N) voor het toetsen of het aantal ijsberen in het noordpoolgebied gezakt is onder de 20.000. Herformuleer de hypothesen in termen van de onbekende parameter p . Geef een toetsingsgrootte. (Als het niet gelukt is hypothesen te formuleren, neem dan als hypothesen $H_0 : p \leq 0.5$ en $H_1 : p > 0.5$.)
- (b) Bepaal het (benaderd) kritieke gebied. Neem als onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha_0 = 0.05$.
- (c) De biologen hebben 130 gemerkte ijsberen gevonden. Moet de nulhypothese verworpen worden? Wat is je conclusie?

Normering:

1(a): 4 2(a): 3 3(a): 3
 1(b): 4 2(b): 3 3(b): 4
 1(c): 2 2(c): 3 3(c): 1

Eindcijfer: (totaal + 3)/3