

U krijgt de beschikking over een tabellenboekje. Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan. Succes!

1. De stochastische grootheden $X_1, \dots, X_n$ zijn onafhankelijk en identiek verdeeld met de marginale kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{\theta^{x-1}}{x} \frac{2}{2+\theta} \quad \text{voor } x \in \{1, 2\}$$

en 0 voor $x \notin \{1, 2\}$. Hierin is $\theta > 0$ een onbekende parameter. We kiezen op de parameterruimte voor θ een a-priori verdeling met kansdichtheid

$$\pi(\theta) = \frac{\theta^\beta (2+\theta)^n e^{-\lambda\theta}}{c(\beta, \lambda)} \quad \text{voor } \theta > 0$$

voor λ en β positieve constanten en $c(\beta, \lambda)$ een normeringsconstante.

- (a) Laat zien dat de dichtheid van de a-posteriori verdeling voor θ relatief ten opzichte van deze a-priori verdeling een $\Gamma(\alpha, \lambda)$ -dichtheid is. Geef een uitdrukking voor bijbehorende α in termen van β, n en $(X_1, \dots, X_n)$.

Hint: de dichtheid $f_{\alpha, \lambda}$ van de $\Gamma(\alpha, \lambda)$ -verdeling heeft de vorm

$$f_{\alpha, \lambda}(\theta) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\lambda\theta} \quad \text{voor } \theta > 0,$$

waarbij $\Gamma(\alpha)$ een normeringsconstante is.

- (b) Bepaal de Bayes schatter voor θ behorend bij de gegeven a-priori verdeling. U mag hierbij gebruiken dat de verwachting van een $\Gamma(\alpha, \lambda)$ -verdeelde grootte gelijk is aan α/λ .

2. Stel $X_1, \dots, X_n$ is een steekproef uit een verdeling met kansdichtheid

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2} & \text{voor } 0 \leq x \leq \theta, \\ 0 & \text{voor } x > \theta, \end{cases}$$

waarbij $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

-
- (a) Bepaal de momentenschatter voor θ . Laat zien dat de momentenschatter schatter zuiver is voor θ .
 - (b) Bepaal de meest aannemelijke schatter voor θ .
 - (c) Is de meest aannemelijke schatter voor θ zuiver? Zo niet, geef dan een zuivere schatter voor θ op basis van de meest aannemelijke schatter.
 - (d) Bepaal een voldoende statistiek. Leg uit wat de stelling van Rao-Blackwell zegt over de variantie van zuivere schatters.

3. Laat $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met kansdichtheid p_θ gegeven door

$$p_\theta(x) = \theta^2 x e^{-\theta x}, \quad x \geq 0,$$

waarbij $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

- (a) Bepaal de meest aannemelijke schatter voor θ .
 - (b) Bereken de waargenomen (Fisher) informatie voor θ .
 - (c) Geef een benaderd betrouwbaarheidsinterval voor θ op basis van de meest aannemelijke schatter voor θ , met onbetrouwbaarheid α .
4. De fabrikant van M & Ms beweert dat de fractie rode M & Ms in een zakje M & Ms gelijk is aan 20%. We willen onderzoeken of dit klopt. We nemen een aselechte steekproef van 30 zakjes M & Ms met ieder 60 M & Ms. Laat Y_i het aantal rode M & Ms zijn in het i -de zakje ($i = 1, \dots, 30$). Veronderstel dat $Y_1, \dots, Y_{30}$ onderling onafhankelijk zijn en dat Y_i binomiaal verdeeld is met parameters 60 en p : de fractie rode M & Ms in een zakje.

- (a) Bepaal de meest aanemelijke schatter voor p . Is deze schatter zuiver?
- (b) Geef een benaderd 95% betrouwbaarheidsinterval voor p .
- (c) Beschrijf een toets voor het toetsen van de hypothese $H_0 : p = 0.2$ tegen $H_1 : p \neq 0.2$. Geef de toetsingsgrootheid, de verdeling van de toetsingsgrootheid en leg uit hoe het kritieke gebied gecontrueerd moet worden (het geven van de grenzen van het gebied is niet nodig).

Normering:

1(a): 5 2(a): 3 3(a): 3 4(a): 3
 1(b): 2 2(b): 3 3(b): 2 4(b): 3
 2(c): 3 3(c): 3 4(c): 3
 2(d): 3

Eindcijfer: (totaal + 4)/4