

U krijgt de beschikking over een tabellenboekje. Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan. Succes!

1. Laat $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke en gelijkverdeelde stochastische variabelen zijn met de alternatieve verdeling. Dus

$$P_\theta(X_i = x) = \theta^x(1 - \theta)^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\},$$

waarbij $\theta \in (0, 1)$ een onbekende parameter is.

- (a) Bepaal de momentenschatter voor θ^2 op basis van het eerste moment. Laat zien dat deze momentenschatter niet zuiver is voor θ^2 .
 - (b) Bepaal een zuivere schatter voor θ^2 op basis van je antwoord in opgave 1a.
 - (c) Geef een voldoende en volledige statistiek.
 - (d) Bepaal een UMVZ-schatter voor θ^2 .
2. Laat $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met kansdichtheid p_θ gegeven door

$$p_\theta(x) = \theta^2 x e^{-\theta x}, \quad x \geq 0,$$

waarbij $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

- (a) Bepaal de meest aannemelijke schatter voor θ .
- (b) Bepaal de likelihood ratio statistiek, λ_n , voor het toetsen van de nulhypothese $H_0 : \theta = \theta_0$ tegen de alternatieve hypothese $H_1 : \theta \neq \theta_0$.
- (c) Bepaal een benaderend betrouwbaarheidsinterval met onbetrouwbaarheid α voor θ op basis van de likelihood ratio statistiek.

3. Twee meren, meer A en meer B, worden vergeleken met betrekking tot de PCB-concentratie in vissen. Onafhankelijk van elkaar worden twee steekproeven gerealiseerd. Uit meer A worden m vissen gecontroleerd en uit meer B n vissen. We willen onderzoeken of er een systematisch verschil is tussen de gemiddelde PCB-concentratie in vissen uit de twee meren.

- (a) Formuleer de bovenstaande onderzoeksvraag als een toetsingsprobleem en geef de standaard toets voor onbetrouwbaarheidsdrempel α . Welke veronderstellingen maak je? Geef in ieder geval: de nul en de alternatieve hypothese, de toetsingsgrootte en het kritieke gebied.
- (b) Voer de toets uit voor $m = 10, n = 12, X_1, \dots, X_{10}$ de PCB-concentratie in de 10 vissen uit meer A, $Y_1, \dots, Y_{12}$ de PCB-concentratie in de 12 vissen uit meer B, $\bar{X} = 10.0, \bar{Y} = 8.0, \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 18.0, \sum_{i=1}^{12} (Y_i - \bar{Y})^2 = 22.0, \sqrt{2}/\sqrt{1/10 + 1/12} = 3.30$. Gebruik een onbetrouwbaarheidsdrempel van 5%.

4. Gloeilampen hebben een levensduur die exponentieel verdeeld is met onbekende parameter λ . Laat $X_1, \dots, X_n$ de levensduur van n aselekt getrokken gloeilampen zijn.

- (a) Geef de meest aannemelijke schatter voor λ .
- (b) Bereken de Fisher informatie voor λ .
- (c) Stel een benaderd 95% betrouwbaarheidsinterval op voor λ op basis van de meest aannemelijke schatter voor λ .
- (d) Stel een benaderd 95% betrouwbaarheidsinterval op voor de verwachte levensduur van een gloeilamp op basis van de meest aannemelijke schatter voor λ .

Normering:

1(a):	4	2(a):	3	3(a):	4	4(a):	3
1(b):	3	2(b):	3	3(b):	2	4(b):	2
1(c):	2	2(c):	3			4(c):	3
1(d):	2					4(d):	2

Eindcijfer: (totaal + 4)/4