

Het gebruik een rekenmachine is niet toegestaan en niet nuttig. Succes!

1. Laat $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke en gelijk verdeelde stochastische variabelen zijn met de geometrische verdeling:

$$P_\theta(X = x) = (1 - \theta)^{x-1}\theta, \quad x = 1, 2, \dots,$$

waarbij $\theta \in (0, 1)$ een onbekende parameter is. We gaan θ Bayesiaans schatten. Als a-priori verdeling nemen we de verdeling met kansdichtheid

$$\pi(\theta) = 6\theta(1 - \theta), \quad \theta \in (0, 1).$$

- (a) Bepaal de a-posteriori dichtheid. Tot welke bekende verdeling behoort de a-posteriori verdeling? Met welke parameters?

Hint: De beta(α, β)-verdeling heeft dichtheid

$$p_{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, \quad x \in (0, 1)$$

met $B(\alpha, \beta)$ een constante zodanig dat $p_{(\alpha, \beta)}$ een dichtheid op $(0, 1)$ is.

- (b) Geef de Bayes-schatting voor θ . Hierbij mag u gebruik maken van het feit dat de verwachting van een beta(α, β) verdeelde stochastische grootte gelijk is aan $\alpha/(\alpha + \beta)$.

2. Laat $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke en gelijkverdeelde stochastische variabelen zijn met een exponentiële verdeling. Dus $X_1, \dots, X_n$ hebben kansdichtheid p_λ gegeven door

$$p_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0,$$

waarbij $\lambda > 0$ een onbekende parameter is.

- (a) Bepaal de meest aannemelijke schatter voor $1/\lambda^2$.
 - (b) Laat zien dat deze schatter voor $1/\lambda^2$ niet zuiver is.
 - (c) Bepaal een zuivere schatter voor $1/\lambda^2$.
 - (d) Bepaal een momentenschatter voor $1/\lambda^2$.
3. Laat $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke en gelijkverdeelde stochastische variabelen zijn met kansdichtheid p_θ gegeven door

$$p_\theta(x) = \frac{1}{\theta} x^{\frac{1}{\theta}-1}, \quad x \in (0, 1),$$

waarbij $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

- (a) Bepaal de meest aannemelijke schatter voor θ .
- (b) Laat zien dat de meest aannemelijke schatter zuiver is voor θ .
- (c) Geef een voldoende en volledige statistiek.
- (d) Bepaal een UMVZ schatter voor θ .

Normering:

1(a):	4	2(a):	4	3(a):	3
1(b):	2	2(b):	2	3(b):	3
		2(c):	2	3(c):	3
		2(d):	2	3(d):	2

Eindcijfer: (totaal + 3)/3