



**U krijgt de beschikking over een tabellenboekje.
Het gebruik van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan.
Succes!**

1. Laat $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met kansdichtheid p_λ gegeven door

$$p_\lambda(x) = \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda|x|}, \quad x \in \mathbb{R},$$

waarbij $\lambda > 0$ een onbekende parameter is.

- (a) Bepaal de meest aannemelijke schatter (maximum likelihood estimator) voor λ .
 - (b) Bepaal de Fisher informatie voor λ .
 - (c) Bereken de waargenomen (Fisher) informatie voor λ .
 - (d) Geef een benaderd betrouwbaarheidsinterval voor λ op basis van de meest aannemelijke schatter voor λ , met onbetrouwbaarheid α .
2. Laat $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met kansdichtheid $p_{\alpha,\beta}$ gegeven door

$$p_{\alpha,\beta}(x) = \frac{x^\alpha(1-x)^\beta}{B(\alpha,\beta)}, \quad x \in (0,1),$$

waarbij $\alpha, \beta > -1$ onbekende parameters zijn en $B(\alpha, \beta)$ een normeringsconstante.

- (a) Bepaal een voldoende en volledige statistiek voor de parameter (α, β) .
- (b) Bepaal een UMVZ schatter voor

$$g(\alpha, \beta) = \mathbb{E}_{\alpha,\beta} \log \left(\frac{X_1}{1-X_1} \right).$$

Licht toe waarom uw schatter UMVZ is.

3. Laat $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met kansdichtheid p_θ gegeven door

$$p_\theta(x) = \frac{1}{2}\theta e^{-\theta|x|}, \quad x \in \mathbb{R},$$

waarbij $\theta > 0$ een onbekende parameter is. We gaan deze parameter Bayesiaans schatten en gebruiken daarvoor als a-priori verdeling een gamma verdeling met vast gekozen parameters $r, \lambda > 0$. Deze heeft dichtheid

$$\pi(\theta) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \theta^{r-1} e^{-\lambda\theta}, \quad \theta > 0,$$

met Γ de gamma functie (de precieze vorm van Γ doet er niet toe), verwachting r/λ en variantie r/λ^2 .

- Bepaal de a-posteriori verdeling. Welke bekende verdeling is dit?
- Bepaal de Bayes schatter voor θ op basis van de steekproef.

4. In een supermarkt worden zakken rijst verkocht. Volgens de verpakking bevatten de zakken 10 kg rijst. We willen controleren of deze informatie klopt. Daartoe hebben we 101 zakken rijst gewogen. De waargenomen metingen noteren we met $X_1, \dots, X_{101}$. We nemen aan dat $X_1, \dots, X_{101}$ onderling onafhankelijk zijn en dat $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ voor $i = 1, \dots, 101$ waarbij μ en $\sigma^2 > 0$ onbekende parameters zijn. Het gemiddelde gewicht, $\bar{x}$, is 8.4 kg en de steekproefstandaardafwijking, s_x , is gelijk aan 0.7.

- We hebben het vermoeden dat de zakken structureel te weinig rijst bevatten. Toets dit vermoeden. Neem als onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha = 0.05$. Vermeld de hypothesen, de toetsingsgrootheid, de overschrijdingskans of het kritieke gebied en geef je conclusie.

De fabrikant krijgt een waarschuwing. De fabrikant geeft hier gehoor aan en doet, naar eigen zeggen, meer rijst in de zakken. We wegen opnieuw 101 zakken rijst. Deze metingen geven we aan met $Y_1, \dots, Y_{101}$. We nemen aan dat $Y_1, \dots, Y_{101}$ onderling onafhankelijk zijn en dat $Y_i \sim \mathcal{N}(\nu, \tau^2)$ voor $i = 1, \dots, 101$ waarbij ν en $\tau^2 > 0$ onbekende parameters zijn. Het gemiddelde gewicht, $\bar{y}$, is 10.5 kg en de steekproefstandaardafwijking, s_y , is gelijk aan 0.5.

- Bepaal een 95% betrouwbaarheidsinterval voor het verschil in verwacht gewicht voor en na de waarschuwing. Geef aan welke aannames je maakt.
Hint: Bepaal een geschikte pivot en de verdeling van deze pivot.
- Toets of het verwachte gewicht na de waarschuwing hoger is dan voor de waarschuwing. Neem als onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha = 0.05$. Vermeld de hypothesen, de toetsingsgrootheid, de overschrijdingskans of het kritieke gebied en geef je conclusie.

Normering:

1(a):	4	2(a):	3	3(a):	3	4(a):	3
1(b):	4	2(b):	4	3(b):	3	4(b):	4
1(c):	2					4(c):	3
1(d):	3						

Eindcijfer: (totaal + 4)/4



- **Rekenregels integreren:**

$$\begin{aligned}\int a f(x) + b g(x) dx &= a \int f(x) dx + b \int g(x) dx \\ \int f'(g(x)) g'(x) dx &= f(g(x)) + C \\ \int f'(x) g(x) dx &= f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx \\ \int_a^b f'(x) dx &= f(b) - f(a) \\ \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt &= f(x)\end{aligned}$$

- **Primitieven:**

$$\begin{aligned}\int x^k dx &= \frac{1}{k+1} x^{k+1} + C, \\ &\quad (k \neq -1) \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln |x| + C \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C \\ \int \cos x dx &= \sin x + C \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + C \\ \int e^x dx &= e^x + C \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan x + C \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C\end{aligned}$$

- **Reeksen:**

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1 \\ e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ \sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \\ &\quad |x| < 1\end{aligned}$$

- **Complexe getallen:** In het vervolg is $z = x + iy$, $z \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Zij $a \in \mathbb{C}$. Dan is $|z - a|$ de afstand van a tot z in het complexe vlak (Gaussvlak).

$$\begin{aligned}i^2 &= -1 \\ \bar{z} &= x - iy, \text{ de geconjugeerde van } z \\ |z| &= \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \\ |z^n| &= |z|^n \\ \arg(z^n) &= n \arg(z) \pmod{2\pi} \\ e^{i\phi} &= \cos \phi + i \sin \phi \\ e^{\pi i} &= -1\end{aligned}$$

Formuleblad Calculus voor Informatica

• Exponenten:

$$(ab)^r = a^r b^r$$

$$a^r a^s = a^{r+s}$$

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

• Trigonometrie:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 1 - 2\sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1\end{aligned}$$

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

• Limieten:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty, \text{ voor vaste } k \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^k \ln x = 0, \text{ voor vaste } k > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^k} = 0, \text{ voor vaste } k > 0$$

• Rekenregels differentiëren:

$$\frac{d}{dx} (f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

$$\frac{d}{dx} (cf(x)) = cf'(x)$$

$$\frac{d}{dx} (f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

• Afgeleiden:

$$\frac{d}{dx} x^k = kx^{k-1}$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$