



Afdeling Wiskunde

Voortentamen Algemene Statistiek (W/Ectr)

Vrije Universiteit

19 december 2005

**Het gebruik van rekenmachines is niet toegestaan (en niet nuttig).
Succes!**

1. Laat $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met kansdichtheid p_θ gegeven door

$$p_\theta(x) = 2\theta x^{2\theta-1}, \quad x \in (0, 1),$$

waarbij $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

- (a) Bereken de verwachting $\mathbb{E}_\theta X_1$.
 - (b) Bepaal de momentschatting voor θ .
 - (c) Bepaal de meest aannemelijke schatting voor θ .
2. Laat $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met een $N(\mu, \sigma^2)$ -verdeling, waarbij σ^2 bekend is en $\mu > 0$ een onbekende parameter (let op de ongebruikelijke vorm van de parameterruimte!)
- (a) Laat zien dat $\max\{\bar{X}, 0\}$ de meest aannemelijke schatting voor μ is.
 - (b) Laat zien dat de onzuiverheid (bias) van de meest aannemelijke schatting niet-positief is (≤ 0).
 - (c) Geef een intuïtieve verklaring voor deze niet-positieve onzuiverheid (dus zonder een berekening te doen).

3. Laat $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke, gelijk verdeelde stochastische variabelen zijn met een homogene verdeling op $[0, \theta]$, met $\theta > 0$. We gaan θ Bayesiaans schatten. Als a-priori verdeling voor θ nemen we homogene verdeling op $[0, a]$, voor een gegeven $a > 0$.

(a) Bepaal de a-posteriori dichtheid.

(b) Bepaal de Bayes schatter voor θ .

4. Laat $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke, gelijk verdeelde stochastische variabelen zijn met een geometrische verdeling met parameter $\theta \in (0, 1)$. Dus

$$\mathbb{P}_\theta(X_1 = x) = \theta(1 - \theta)^{x-1}, \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

Voor deze verdeling geldt dat $\mathbb{E}_\theta X_1 = 1/\theta$ en $\text{Var}_\theta X_1 = (1 - \theta)/\theta^2$.

(a) Bepaal een voldoende en volledige statistiek.

(b) Bepaal een UMVZ-schatter voor $1/\theta$.

(c) Bepaal de Cramér-Rao ondergrens voor de variantie van een zuivere schatter voor $1/\theta$. Haalt de UMVZ-schatter uit (b) de ondergrens?

Normering:

1(a):	2	2(a):	4	3(a):	4	4(a):	4
1(b):	2	2(b):	3	3(b):	4	4(b):	3
1(c):	4	2(c):	2			4(c):	4

Eindcijfer = (totaal+4)/4