

**U krijgt de beschikking over een tabellenboekje.
Het gebruik van niet-programmeerbare rekenmachines is toegestaan.
Succes!**

1. Laat $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met kansdichtheid p_θ gegeven door

$$p_\theta(x) = \frac{2\theta}{9\theta} x^{2\theta-1}, \quad x \in [0, 3],$$

waarbij $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

- (a) Bepaal de momentenschatteer voor θ .
 - (b) Bepaal de meest aannemelijke schatteer (maximum likelihood estimator) voor θ .
 - (c) Bereken de waargenomen Fisher informatie.
 - (d) Geef een benaderend betrouwbaarheidsinterval voor θ , met onbetrouwbaarheid α .
2. Laat $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn, geometrisch verdeeld met parameter $\theta \in (0, 1)$. Dat wil zeggen dat

$$\mathbb{P}_\theta(X_i = k) = (1 - \theta)^{k-1} \theta, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

We gaan de parameter θ Bayesiaans schatten en gebruiken daarvoor als a-priori verdeling een beta verdeling met vast gekozen parameters $\alpha, \beta > 0$. Deze heeft dichtheid

$$\pi(\theta) = \frac{\theta^{\alpha-1} (1 - \theta)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, \quad \theta \in (0, 1),$$

waarbij $B(\alpha, \beta)$ een normeringsconstante is. De verwachting van deze verdeling is $\alpha/(\alpha + \beta)$.

- (a) Bepaal de a-posteriori verdeling.
- (b) Bepaal de Bayes schatteer voor θ .

3. De opiniepeiler Maurice is geïnteresseerd in de fractie θ van alle Nederlanders die voor de nieuwe Europese "grondwet" is. Hij belt daarom 1000 willekeurige mensen op en vraagt ze of ze voorstander zijn. Zij X het aantal ondervraagden dat de vraag bevestigend beantwoordt.
- (a) Als we aannemen dat de antwoorden van de ondervraagden onafhankelijk van elkaar zijn, wat is dan de verdeling van X ?
 - (b) Maurice wil weten of the fractie θ groter dan $1/2$ is. Formuleer dit als een toetsingsprobleem en geef een bruikbare toets van (benaderd) niveau α voor dit probleem.
 - (c) Stel dat 530 ondervraagden voor de grondwet zijn. Kan Maurice dan bij onbetrouwbaarheidsniveau 5% concluderen dat inderdaad $\theta > 1/2$?

4. Laat $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met dichtheid

$$p_{\lambda,r}(x) = \frac{1}{(r-1)!} \lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0,$$

waarbij $\lambda > 0$ en $r \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Voor deze verdeling geldt

$$\mathbb{E}_{\lambda,r} X_i = \frac{r}{\lambda}, \quad \text{Var}_{\lambda,r} X_i = \frac{r}{\lambda^2}.$$

- (a) Stel dat λ en r allebei onbekend zijn. Bepaal een voldoende statistiek voor het paar (λ, r) .
- (b) Stel nu dat r bekend is en dat alleen λ onbekend is. Bepaal een voldoende en volledige statistiek voor λ .
- (c) Bepaal een UMVZ schatter voor $1/\lambda$ onder dezelfde veronderstellingen als bij (b).
- (d) Bepaal, nog steeds onder dezelfde veronderstellingen als bij (b), de Cramér-Rao ondergrens voor de variantie van een zuivere schatter voor $1/\lambda$ en vergelijk die met de variantie van de schatter die gevonden is in onderdeel (c).

Normering:

1(a):	3	2(a):	4	3(a):	1	4(a):	2
1(b):	4	2(b):	2	3(b):	3	4(b):	3
1(c):	3			3(c):	3	4(c):	3
1(d):	2					4(d):	3

Eindcijfer = (totaal+4)/4