

U krijgt de beschikking over een tabellenboekje.
Het gebruik van rekenmachines is niet toegestaan.
Succes!

1. Laat $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met kansdichtheid p_θ gegeven door

$$p_\theta(x) = \theta 2^{-\theta} x^{\theta-1}, \quad x \in [0, 2],$$

waarbij $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

- (a) Bepaal de momentenschatter voor θ .
- (b) Bepaal de meest aannemelijke schatter (maximum likelihood estimator) voor θ .
- (c) Bereken de waargenomen Fisher informatie.
- (d) Geef een benaderend betrouwbaarheidsinterval voor θ , met onbetrouwbaarheid α .

2. Laat $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met een exponentiële verdeling met parameter $\theta > 0$. Dat wil zeggen dat de dichtheid p_θ van X_i gegeven is door

$$p_\theta(x) = \theta e^{-\theta x}, \quad x > 0.$$

We gaan de parameter θ Bayesiaans schatten en gebruiken daarvoor als a-priori verdeling een exponentiële verdeling met parameter $\lambda > 0$. De a-priori dichtheid is dus gegeven door

$$\pi(\theta) = \lambda e^{-\lambda \theta}, \quad \theta > 0.$$

- (a) Bepaal de a-posteriori verdeling. U mag hierbij gebruik maken van het feit dat voor $r, \omega > 0$, de functie

$$f(x) = \frac{\omega^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\omega x}, \quad x > 0,$$

een kansdichtheid is, met Γ de gamma functie (de precieze vorm van Γ doet er niet toe). De bijbehorende verdeling heet een gamma verdeling met parameters r en ω .

- (b) De gamma verdeling met parameters r en ω heeft verwachting r/ω en variantie r/ω^2 . Bepaal nu de Bayes schatter voor θ .

3. In 2003 deden twee groepen studenten mee aan het Algemene Statistiek tentamen, met de volgende resultaten:

Groep 1:

5.8, 5.3, 8.6, 4.8, 5.6, 6.6, 7.1, 9.1, 8.3, 6.4, 5.6, 8.3, 8.4, 4.3, 7.3, 7.5, 4.8, 7.5, 9.1, 7.1

Groep 2:

9, 6.8, 8.4, 5.6, 9.3, 4.6, 7, 8.4, 7.6, 6.6, 7.9, 9.4, 9.5, 6.3, 7.4, 9.8, 8, 9.8, 9, 7.8, 6.6, 7.1

We willen onderzoeken of Groep 2 beter heeft gepresteerd dan Groep 1. De resultaten van Groep 1 noteren we met $X_1, \dots, X_{20}$ en die van Groep 2 met $Y_1, \dots, Y_{22}$. We nemen aan dat al deze stochasten onafhankelijk zijn en dat $X_i \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ voor $i = 1, \dots, 20$ en $Y_j \sim N(\mu_2, \sigma^2)$ voor $j = 1, \dots, 22$, waarbij $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ en $\sigma^2 \geq 0$ onbekende parameters zijn.

- Formuleer de bovenstaande onderzoeksvraag als een toetsingsprobleem en geef de standaard toets.
 - Voer de toets uit en geef uw conclusie. U mag hierbij gebruik maken van het feit dat de gemiddelden en steekproefvarianties van de data gegeven worden door $\bar{X} = 6.88$, $S_X^2 = 2.25$, $\bar{Y} = 7.81$, $S_Y^2 = 1.99$. Neem een onbetrouwbaarheidsdrempel van 5%.
4. Laat $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn, geometrisch verdeeld met parameter $p \in (0, 1)$. Dat wil zeggen dat

$$\mathbb{P}_p(X_i = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

De geometrische verdeling heeft verwachting $1/p$ en variantie $(1 - p)/p^2$.

- Bepaal een voldoende en volledige statistiek voor de parameter $1/p$.
- Bepaal de Cramér-Rao ondergrens voor de variantie van een zuivere schatter voor $1/p$.
- Laat zien dat de meest aannemelijke schatter voor $1/p$ een UMVZ schatter is.

Normering:

1(a):	3	2(a):	3	3(a):	4	4(a):	4
1(b):	4	2(b):	2	3(b):	5	4(b):	4
1(c):	2					4(c):	3
1(d):	2						

Eindcijfer = (totaal+4)/4