

Afdeling Wiskunde

Voortentamen Algemene Statistiek (W/Ectr)

Vrije Universiteit

20 december 2004

**U krijgt de beschikking over een tabellenboekje.
 Het gebruik van rekenmachines is niet toegestaan.
 Succes!**

1. Laat $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met kansdichtheid p_θ gegeven door

$$p_\theta(x) = \begin{cases} 3 \frac{x^2}{\theta^3}, & x \in (0, \theta), \\ 0, & \text{elders,} \end{cases}$$

waarbij $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

- Bereken de verwachting $\mathbb{E}_\theta X_1$ en bepaal de momentenschatter voor θ .
 - Bepaal de meest aannemelijke schatter (maximum likelihood estimator) voor θ .
 - Beschouw de hypotheses $H_0 : \theta \leq 1$ en $H_1 : \theta > 1$. Kies een geschikte toetsingsgrootte voor het toetsen van H_0 tegen H_1 en bepaal daarvan de verdelingsfunctie.
 - Bepaal het kritieke gebied van de toets uit onderdeel (c) bij een onbetrouwbaarheidsniveau $\alpha \in (0, 1)$.
2. Zij X Binomiaal verdeeld met parameters $n \in \mathbb{N}$ en $\theta \in [0, 1]$. We veronderstellen dat n bekend is en dat θ een onbekende parameter is. Voor gegeven $\alpha, \beta > 0$, zij π de functie op $[0, 1]$ gegeven door

$$\pi(\theta) = \frac{\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, \quad \theta \in [0, 1],$$

waarbij de constante $B(\alpha, \beta)$ zodanig gekozen is dat π een kansdichtheid op $[0, 1]$ is, dus $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1} d\theta$.

- Laat zien: als we π als a-priori dichtheid voor de parameter θ nemen, dan wordt de a-posteriori dichtheid $p_{\bar{\theta}|X=x}$ voor θ , gegeven de observatie $X = x$, gegeven door

$$p_{\bar{\theta}|X=x}(\theta) = \frac{\theta^{x+\alpha-1}(1-\theta)^{n-x+\beta-1}}{B(x+\alpha, n-x+\beta)}, \quad \theta \in [0, 1].$$

- Bepaal de Bayes-schatter voor θ ten opzichte van de a-priori dichtheid π . U mag hierbij gebruik maken van het feit dat $B(\alpha+1, \beta) = B(\alpha, \beta)\alpha/(\alpha+\beta)$.

3. Laat $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke, gelijk verdeelde stochastische variabelen zijn met verwachting $\mu \in \mathbb{R}$ en variantie $\sigma^2 \geq 0$.

(a) Laat zien dat de steekproefvariantie S_X^2 een zuivere schatter voor σ^2 is.

Stel nu dat we ook nog weten dat de stochasten $X_1, \dots, X_n$ normaal verdeeld zijn.

(b) Beschrijf de standaard toets van niveau $\alpha \in (0, 1)$ voor het toetsen van de hypothese $H_0 : \sigma^2 \geq 2$ tegen $H_1 : \sigma^2 < 2$. Laat zien dat deze toets inderdaad niveau α heeft.

(c) Stel nu dat $n = 20$ en dat we de realisatie $S_X^2 = 1.23$ waarnemen. Geef de bijbehorende overschrijdingskans voor de toets van onderdeel (b). Mogen we H_0 nu verwerpen bij niveau $\alpha = 0.05$?

Normering:

1(a):	2	2(a):	5	3(a):	3
1(b):	5	2(b):	4	3(b):	4
1(c):	5			3(c):	4
1(d):	4				

Eindcijfer = (totaal+4)/4