



Afdeling Wiskunde

Tentamen Algemene Statistiek (W/Ectr)

Vrije Universiteit

30 juni 2004

**U krijgt de beschikking over een tabellenboekje.
Het gebruik van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan.
Succes!**

1. Laat $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met kansdichtheid p_θ gegeven door

$$p_\theta(x) = \frac{\theta}{(1+x)^{1+\theta}}, \quad x \geq 0,$$

waarbij $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

- (a) Bepaal de momentenschatter voor θ , onder de extra aanname dat $\theta > 1$.
- (b) Bepaal de meest aannemelijke schatter (maximum likelihood estimator) voor θ .
- (c) Bereken de waargenomen Fisher informatie en geef een benaderend betrouwbaarheidsinterval voor θ , met onbetrouwbaarheid α .

2. Laat $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn, geometrisch verdeeld met parameter $p \in (0, 1)$. Dat wil zeggen dat

$$\mathbb{P}_\theta(X_i = k) = (1-p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

We gaan de parameter p Bayesiaans schatten en gebruiken daarvoor als a-priori verdeling een beta verdeling met vast gekozen parameters $\alpha, \beta > 0$. Deze heeft dichtheid

$$\pi(p) = \frac{p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, \quad p \in (0, 1),$$

waarbij $B(\alpha, \beta)$ een normeringsconstante is. De verwachting van deze verdeling is $\alpha/(\alpha + \beta)$.

- (a) Bepaal de a-posteriori verdeling.
- (b) Bepaal de Bayes schatter voor p .

3. De opiniepeiler Maurice wil onderzoeken welke fractie p van het Nederlandse volk bondscoach Dick A. nog steunt. Hij gaat daartoe 1000 Nederlanders vragen of ze Dickie steunen en het aantal steunbetuigingen X tellen.
- (a) Als we aannemen dat Nederlanders onafhankelijke denkers zijn, wat is dan de verdeling van X ?
 - (b) Maurice wil aantonen dat meer dan de helft van de Nederlanders de bondscoach steunt. Formuleer dit als een toetsings probleem.
 - (c) Stel, Maurice telt x mensen die Dickie steunen. Geef een formule voor de (benaderde) overschrijdingskans (p -waarde). U mag hierbij gebruik maken van de standaard benadering.
 - (d) Hoeveel mensen moeten hun steun uitspreken om met 95% betrouwbaarheid te kunnen zeggen dat meer dan de helft van de Nederlanders de bondscoach steunt?
4. Laat $X_1, \dots, X_n$ onafhankelijk en gelijkverdeeld zijn, met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = 2 \frac{e^{-\frac{2x}{\tau}}}{\tau}, \quad x \geq 0,$$

waarbij $\tau > 0$ een onbekende parameter is.

- (a) Bepaal de Cramér-Rao ondergrens voor de variantie van een zuivere schatter voor τ .
- (b) Bepaal een voldoende en volledige statistiek voor τ .
- (c) Bepaal een UMVZ-schatter voor τ en ga na af de ondergrens uit onderdeel (a) gehaald wordt.

Normering:

1(a):	3	2(a):	3	3(a):	2	4(a):	3
1(b):	4	2(b):	2	3(b):	2	4(b):	3
1(c):	3			3(c):	4	4(c):	4
				3(d):	3		

Eindcijfer = (totaal+4)/4