



Afdeling Wiskunde

Tentamen Algemene Statistiek (W/Ectr)

Vrije Universiteit

26 maart 2004

U krijgt de beschikking over een tabellenboekje.

Het gebruik van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan.

Succes!

1. Laat $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met kansdichtheid p_θ gegeven door

$$p_\theta(x) = \theta^2 x e^{-\theta x}, \quad x \geq 0,$$

waarbij $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

- (a) Bepaal de meest aannemelijke schatter (maximum likelihood estimator) voor θ .
 - (b) Bereken de waargenomen Fisher informatie.
 - (c) Geef een benaderend betrouwbaarheidsinterval voor θ , met onbetrouwbaarheid α .
 - (d) Beschouw het toetsingsprobleem $H_0 : \theta = 1$ tegen $H_1 : \theta \neq 1$. Bepaal de likelihood ratio statistiek voor dit probleem en bepaal het kritieke gebied voor de likelihood ratio toets, met onbetrouwbaarheid bij benadering $\alpha = 0.05$.
2. Laat $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met kansdichtheid p_θ gegeven door

$$p_\theta(x) = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\theta x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

waarbij $\theta > 0$ een onbekende parameter is. We gaan deze parameter Bayesiaans schatten en gebruiken daarvoor als a-priori verdeling een gamma verdeling met vast gekozen parameters $r, \lambda > 0$. Deze heeft dichtheid

$$\pi(\theta) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \theta^{r-1} e^{-\lambda\theta}, \quad \theta > 0,$$

waarbij Γ de gamma functie is (de precieze vorm van Γ doet er niet toe), verwachting r/λ en variantie r/λ^2 .

- (a) Bepaal de a-posteriori verdeling. Welke bekende verdeling is dit?
- (b) Bepaal de Bayes schatter voor θ .

3. In 2003 deden twee groepen studenten mee aan het Algemene Statistiek tentamen, met de volgende resultaten:

Groep 1:

5.8, 5.3, 8.6, 4.8, 5.6, 6.6, 7.1, 9.1, 8.3, 6.4, 5.6, 8.3, 8.4, 4.3, 7.3, 7.5, 4.8, 7.5, 9.1, 7.1

Groep 2:

9, 6.8, 8.4, 5.6, 9.3, 4.6, 7, 8.4, 7.6, 6.6, 7.9, 9.4, 9.5, 6.3, 7.4, 9.8, 8, 9.8, 9, 7.8, 6.6, 7.1

We willen onderzoeken of Groep 2 beter heeft gepresteerd dan Groep 1. De resultaten van Groep 1 noteren we met $X_1, \dots, X_{20}$ en die van Groep 2 met $Y_1, \dots, Y_{22}$. We nemen aan dat al deze stochasten onafhankelijk zijn en dat $X_i \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ voor $i = 1, \dots, 20$ en $Y_j \sim N(\mu_2, \sigma^2)$ voor $j = 1, \dots, 22$, waarbij $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ en $\sigma^2 \geq 0$ onbekende parameters zijn.

- Formuleer de bovenstaande onderzoeksvraag als een toetsingsprobleem en geef de standaard toets.
 - Voer de toets uit en geef uw conclusie. U mag hierbij gebruik maken van het feit dat de gemiddelden en steekproefvarianties van de data gegeven worden door $\bar{X} = 6.88$, $S_X^2 = 2.25$, $\bar{Y} = 7.81$, $S_Y^2 = 1.99$. Neem een onbetrouwbaarheidsdrempel van 5%.
4. Laat $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met kansdichtheid p_θ gegeven door

$$p_\theta(x) = \frac{1}{\theta} x^{\frac{1}{\theta}-1}, \quad x \in [0, 1],$$

waarbij $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

- Bepaal de momentenschatter voor θ .
- Bepaal de meest aannemelijke schatter voor θ .
- Bepaal een voldoende en volledige statistiek voor θ en geef een UMVZ schatter.

Normering:

1(a):	4	2(a):	4	3(a):	4	4(a):	2
1(b):	2	2(b):	2	3(b):	4	4(b):	4
1(c):	2					4(c):	4
1(d):	4						

Eindcijfer = (totaal+4)/4